BULLETIN DE LA S. M. F.

JOSEPH LE POTIER
CONSTANTIN BĂNICĂ

Fibrés vectoriels topologiques de rang élevé sur une hypersurface

Bulletin de la S. M. F., tome 121, nº 2 (1993), p. 271-297
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1993__121_2_271_0>

Bull. Soc. math. France,
121, 1993, p. 271–297.

FIBRÉS VECTORIELS TOPOLOGIQUES DE RANG ÉLEVÉ SUR UNE HYPERSURFACE

PAR

JOSEPH LE POTIER (*) et CONSTANTIN BĂNICĂ (**)

RÉSUMÉ. — Cet article contient deux résultats : a) le calcul de l'algèbre de Grothendieck des fibrés vectoriels topologiques sur une hypersurface X de degré d et de dimension n de l'espace projectif complexe ; b) la description des classes de cohomologie entières $(c_i) \in \mathrm{H}^{2i}(X)$ qui sont les classes de Chern d'un fibré vectoriel topologique de rang $r \geq n$. L'énoncé obtenu généralise le résultat classique de Schwarzenberger et Thomas sur l'espace projectif.

ABSTRACT. — Let X an hypersurface of degree d and dimension n in the complex projective space. This article contains two results : a) the computation of the Grothendieck algebra for topological vector bundles on X ; b) the description of entire cohomology classes $(c_i) \in \mathrm{H}^{2i}(X)$ which are the Chern classes of a topological vector bundle of rank $r \geq n$. The result generalizes the classical result of Schwarzenberger and Thomas on the complex projective space.

0. Introduction

On connaît, d'après SCHWARZENBERGER et THOMAS [10], la classification topologique des fibrés vectoriels complexes de rang $r \geq n$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$: ceux-ci sont décrits par leurs classes de Chern $c_i \in \mathrm{H}^{2i}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$; ces nombres ne sont pas arbitraires, mais doivent satisfaire à certaines conditions d'intégralité S_k (pour $k = 3, \ldots, n$) connues sous le nom de *conditions de Schwarzenberger* (cf. § 4). Dans ce travail, nous généralisons ce résultat aux hypersurfaces lisses X de dimension n et de degré d de l'espace projectif complexe : nous décrivons l'algèbre de Grothendieck topologique $\mathrm{K}(X)$ et nous donnons la classification des fibrés vectoriels topologiques de rang $r \geq n$ en termes de

(*) Texte reçu le 20 janvier 1992, révisé le 26 mai 1992.
J. LE POTIER, UFR de Mathématiques et URA 212, Université Paris VII, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.
(**) C. BĂNICĂ, décédé le 25.12.91. Institut de Mathématique, Bd. Păçii 220, Bucarest.
Classification AMS : 14F05.

conditions d'intégralité portant sur les classes de Chern. Cette classification est obtenue au § 4 en suivant une idée de BĂNICĂ et PUTINAR [2] et de LE POTIER [8], en utilisant le théorème de Riemann-Roch topologique, dit aussi théorème de l'indice, appliqué aux sous-variétés de l'hypersurface X.

Nous commençons par quelques rappels bien connus concernant les rapports entre l'algèbre de Grothendieck et l'algèbre de cohomologie d'un CW-complexe fini, quand on fait l'hypothèse que la cohomologie n'a pas de torsion : sous cette hypothèse, la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch dégénère, et l'algèbre graduée associée $\mathrm{gr}(\mathrm{K}(X))$ s'identifie à l'algèbre de cohomologie paire. Nous donnons ensuite la description de l'algèbre de Grothendieck dans le cas des quadriques lisses : l'algèbre de Grothendieck diffère déjà dans ce cas particulier de l'algèbre de cohomologie et cette étude donne une bonne intuition de ce qui ce passe en degré quelconque. Cependant, dans le cas des quadriques les générateurs de $\mathrm{K}(X)$ sont algébriques et ont une bonne interprétation géométrique. Ce n'est plus le cas en degré quelconque ; nous avons mis en évidence un système de générateurs de l'algèbre de $\mathrm{K}(X)$ sur lequel la structure multiplicative s'exprime simplement, mais nous n'avons obtenu une interprétation géométrique de ces générateurs que pour les hypersurfaces de Fermat de dimension impaire. Ces générateurs sont obtenus essentiellement en relevant les générateurs de l'algèbre de cohomologie paire. Tout le travail consiste à déterminer quelles sont les relations entre ces générateurs dans l'algèbre $\mathrm{K}(X)$.

1. Le caractère de Chern

Soit X un espace topologique compact et $\emptyset \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset X$ une suite croissante de sous-espaces fermés. On pose :

$$F^p\,\mathrm{K}(X) = \ker \mathrm{K}(X) \to \mathrm{K}(X_{p-1}).$$

Ceci définit une filtration décroissante et finie de l'algèbre de Grothendieck $\mathrm{K}(X)$. De même, si A est un anneau commutatif et unitaire, on a une filtration décroissante et finie de la cohomologie de X à valeurs dans A en posant :

$$F^p\,\mathrm{H}(X,A)) = \ker \mathrm{H}(X,A) \to \mathrm{H}(X_{p-1},A).$$

Cette filtration est celle que l'on obtient comme aboutissement de la suite spectrale $E_r(A)$ associée à la suite X_p ci-dessus et dont le terme E_1 est donné par :

$$E_1^{p,q} = \mathrm{H}^{p+q}\big(X_p, X_{p-1}; A\big).$$

Ceci s'applique en particulier au cas où X est un CW-complexe fini de dimension n, muni de la filtration définie en prenant pour X_p le p-squelette de X. On a dans ce cas $E_2^{p,q} = 0$ si $q \neq 0$. Il en résulte que la filtration obtenue sur $\mathrm{H}(X, A)$ est indépendante de X_p : elle peut aussi être définie par

$$F^p \,\mathrm{H}(X, A) = \bigoplus_{i \geq p} \mathrm{H}^i(X, A)$$

et l'algèbre graduée associée est encore $\mathrm{H}(X, A)$. L'algèbre $\mathrm{K}(X)$ étant munie de la filtration associée au squelette de X, considérons le morphisme d'algèbres défini par le caractère de Chern :

$$\mathrm{ch} : \mathrm{K}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X, \mathbb{Q}).$$

PROPOSITION 1.1. — *Soit X un CW-complexe fini et connexe dont la cohomologie entière est sans torsion. Alors :*

(i) *Le groupe* $\mathrm{K}(X)$ *est sans torsion.*

(ii) *Le caractère de Chern* $\mathrm{ch} : \mathrm{K}(X) \to \mathrm{H}^{pair}(X, \mathbb{Q})$ *est un morphisme injectif d'algèbres filtrées et ce morphisme est strict.*

Démonstration. — Ceci résulte essentiellement de la dégénérescence de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch. Nous ne ferons qu'une esquisse de démonstration; pour plus de détails, on peut par exemple consulter [1] ou [5].

Précisons d'abord les notations : comme X est connexe, le rang d'un élément de $\mathrm{K}(X)$ a un sens; on désigne par $\mathrm{K}^0(X)$ l'idéal de l'algèbre de Grothendieck des éléments de rang nul et on pose $\mathrm{K}^1(X) = \mathrm{K}^0(S(X))$: c'est le groupe de Grothendieck réduit de la suspension de X. Le théorème de périodicité de Bott permet d'obtenir sur $\mathrm{K}^*(X) = \mathrm{K}(X) \oplus \mathrm{K}^1(X)$ une structure d'algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée. Enfin, pour toute paire $Y \subset X$, avec Y non vide, on désigne par $\mathrm{K}^*(X, Y)$ l'idéal $\mathbb{Z}_2$-gradué de $\mathrm{K}^*(C)$ associé au cône C de l'inclusion $Y \hookrightarrow X$ et défini par les éléments de rang nul.

On considère la suite spectrale $\mathbb{Z}_2$-graduée E'_r d'Atiyah-Hirzebruch, associée à la filtration de X par le squelette : elle est donnée au niveau 1 par

$$E_1'^{\,p} = \mathrm{K}^*\big(X_p, X_{p-1}\big)$$

et a pour aboutissement l'algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée $\mathrm{K}^*(X)$. Le caractère de Chern induit un morphisme de suites spectrales $E'_r \to E_r(\mathbb{Q})$.

• Au niveau $E_1'^{\,p}$, ce morphisme est le morphisme induit par le caractère de Chern sur un bouquet de sphères de dimension p : ainsi, le caractère de Chern identifie E'_1 avec le sous-module $E_1(\mathbb{Z}) \subset E_1(\mathbb{Q})$.

• Au niveau E'_2, on obtient encore un plongement $E'^{p}_2 \hookrightarrow \mathrm{H}^p(X,\mathbb{Q})$ dont l'image est exactement $\mathrm{H}^p(X,\mathbb{Z})$.

Il en résulte que la suite spectrale E'_r dégénère à partir du niveau E'_2, puisque c'est le cas de la suite spectrale $E_r(\mathbb{Q})$. Ainsi, on a une filtration décroissante finie de $\mathrm{K}^*(X)$ dont le gradué $\mathrm{gr}^p\,\mathrm{K}^*(X)$ est isomorphe à $\mathrm{H}^p(X,\mathbb{Z})$. L'assertion (i) en résulte immédiatement.

Pour (ii), on remarque que le caractère de Chern définit un morphisme

$$\mathrm{ch} : \mathrm{K}^*(X) \longrightarrow \mathrm{H}(X,\mathbb{Q})$$

compatible avec les filtrations définies ci-dessus. En degré p le morphisme induit sur les gradués n'est autre, d'après ce qu'on vient de voir, que l'inclusion canonique :

$$\mathrm{H}^p(X,\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{H}^p(X,\mathbb{Q}).$$

Ceci montre que le morphisme ch est strict. Il reste à se limiter au sous-module des termes de degré pair de $\mathrm{K}^*(X)$ pour obtenir l'énoncé. $\square$

Corollaire 1.2. — *Sous les hypothèses ci-dessus, la filtration de* $\mathrm{K}(X)$ *est indépendante du choix de la suite* X_p *et elle est compatible avec la structure multiplicative.*

Ceci résulte du fait que ch est un morphisme d'algèbres. Une autre description de la filtration de $\mathrm{K}(X)$ est obtenue par l'annulation du rang r et des classes de Chern :

$$F^{2p}\,\mathrm{K}(X) = \big\{\xi \in \mathrm{K}^0(X)\,;\ c_1(\xi) = \cdots = c_{p-1}(\xi) = 0\big\}.$$

En particulier, un élément $\xi \in \mathrm{K}(X)$ est nul si et seulement si il est de rang nul et de classes de Chern nulles.

Corollaire 1.3. — *Si la cohomologie entière de* X *est sans torsion, la partie impaire* $\mathrm{gr}^{\mathrm{impair}}\,\mathrm{K}(X)$ *est nulle, et le caractère de Chern induit un isomorphisme d'algèbres graduées :*

$$(*) \qquad \mathrm{gr}\big(\mathrm{K}(X)\big) \simeq \mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X,\mathbb{Z}).$$

On notera par la suite :

$$F_p\big(\mathrm{K}(X)\big) = F^{2p}\big(\mathrm{K}(X)\big).$$

On utilisera la surjectivité de (*) sous la forme suivante : pour tout entier $p \geq 1$ et tout $a \in \mathrm{H}^{2p}(X,\mathbb{Z})$, il existe $\xi \in \mathrm{K}^0(X)$ tel que

$$\mathrm{ch}\,\xi = a + \textit{termes de degré supérieur}.$$