BULLETIN DE LA S. M. F.

ALBERT RAUGI

Fonctions harmoniques positives sur certains groupes de Lie résolubles connexes

Bulletin de la S. M. F., tome 124, nº 4 (1996), p. 649-684
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_4_649_0>

Bull. Soc. math. France,
124, 1996, p. 649–684.

FONCTIONS HARMONIQUES POSITIVES SUR CERTAINS GROUPES DE LIE RÉSOLUBLES CONNEXES

PAR

ALBERT RAUGI (*)

RÉSUMÉ. — Soient G un groupe de Lie et σ une mesure de Radon positive sur les boréliens de G. Nous étudions le cône des fonctions boréliennes positives h sur G, solutions de l'équation fonctionnelle $\forall g \in G$, $\int_G h(gx)\sigma(\mathrm{d}x) = h(g)$. Sous des conditions classiques sur σ, nous obtenons, pour certains groupes résolubles, une description complète de ce cône. En particulier, nous généralisons un résultat de L. Élie sur le groupe affine réel (voir [13] et [14]) et nous répondons à une question posée par T. Lyons et D. Sullivan [18].

ABSTRACT. — Let G be a Lie group and σ be a positive Radon measure on the borel σ-field of G. We study the cone of positive borel functions h which satisfy : $\forall g \in G$, $\int_G h(gx)\sigma(\mathrm{d}x) = h(g)$. Under classical «smooth» assumptions on σ, we obtain, for some solvable groups, a complete description of this cone. In particular, we generalise a L. Élie's result on the real affine group (see [13], [14]) and we answer to a question of T. Lyons and D. Sullivan [18].

1. Introduction

1.1. — Soient G un groupe localement compact à base dénombrable (L.C.D.) et σ une mesure de Radon positive sur les boréliens de G. Nous notons e l'élément neutre de G. Nous supposons que σ est *adaptée* à G, c'est-à-dire que le sous-groupe fermé de G engendré par le support de σ est égal à G. Nous appelons fonction *σ-harmonique positive à gauche* (resp. à droite) sur G toute fonction borélienne positive h sur G vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\forall g \in G, \quad h(g) = \int_G h(gx)\sigma(\mathrm{d}x) \quad \Big(\text{resp. } h(g) = \int_G h(xg)\sigma(\mathrm{d}x)\Big).$$

(*) Texte reçu le 13 novembre 1995, révisé le 7 mai 1996, accepté le 5 septembre 1996.
A. RAUGI, IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex (France). Email : Albert.Raugi@univ-rennes1.fr.

Classification AMS : 22E30, 31C05, 60J50, 43A80, 45C05, 39Bxx.

1.2. — Nous disons que la mesure σ vérifie l'hypothèse (H) si elle possède une densité continue à support compact, par rapport à une mesure de Haar de G, et si le sous-semi-groupe fermé de G engendré par le support de la mesure σ est égal à G. Lorsque σ vérifie l'hypothèse (H), nous notons $\sigma = \varphi m_G$, en désignant par m_G une mesure de Haar à gauche de G.

1.3. — L'étude du cône HG_+ des fonctions σ-harmoniques positives à gauche a fait l'objet de nombreux travaux. G. Choquet et J. Deny [9] (1960) ont résolu le problème dans le cas d'un groupe abélien, pour une mesure σ générale. Par la suite, H. Furstenberg [15] (1965), G.A Margulis [19] (1966), J.-P. Conze et Y. Guivarc'h [11] (1974) ont étudié le cas d'un groupe respectivement semi-simple, nilpotent, extension compacte d'un groupe nilpotent, pour une mesure σ vérifiant l'hypothèse (H). Tous ces résultats sont obtenus en déterminant, à l'aide d'une *propriété de droite fixe*, les génératrices extrémales du cône des fonctions σ-harmoniques positives.

Une autre façon d'aborder le problème a consisté à utiliser la théorie de la frontière de Martin. Y. Derriennic [12] a résolu le cas du groupe libre; L. Élie [13], [14] celui du groupe affine réel et C. Series [26] celui des groupes Fuchsiens. Citons aussi les travaux de F. Karpelevich [17], Y. Guivarc'h [16] et M. Babillot [6] sur les espaces symétriques et ceux de A. Ancona [1], [2], sur les variétés hyperboliques.

1.4. — Dans cet article, nous présentons une nouvelle approche du problème. Ce qui nous permet d'atteindre une famille de groupes résolubles, plus générale que le groupe affine réel. Nous donnons ci-dessous une idée de la technique utilisée.

Observons tout d'abord que, pour tout $g \in G$, la translatée à gauche $h^g : x \mapsto h(gx)$ d'une fonction h de HG_+ appartient encore à HG_+. L'hypothèse (H) nous assure que toute fonction non nulle du cône HG_+ est strictement positive et que le cône HG_+ est réticulé et à base compacte. Grâce au théorème de Choquet de représentation intégrale dans les cônes réticulés à bases compactes (*cf.* [10], [21]), nous sommes amenés à chercher les éléments extrémaux de ce cône.

Nous désignons par :

- Ω l'espace produit $G^{\mathbb{N}^*}$,
- $\mathcal{F}$ la tribu des boréliens de Ω,
- $(Y_n)_{n\geq 1}$ les applications coordonnées de Ω.

Pour tout entier $n \geq 1$, nous appelons $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les variables aléatoires

$$\{Y_k : 1 \leq k \leq n\}.$$

Nous notons $\mathcal{F}_0$ la tribu triviale $\{\emptyset, \Omega\}$. Nous posons :

$$X_0 = e \quad \text{et} \quad X_n = Y_1 \cdots Y_n \text{ pour } n \geq 1.$$

À toute fonction non nulle h du cône HG_+, nous associons (théorème de Kolmogorov) la probabilité ${}^h\mathbb{P}_\sigma$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ définie par

$$\forall n \geq 1, \quad \int_\Omega f(Y_1, \ldots, Y_n)\,\mathrm{d}^h\mathbb{P}_\sigma = \int_{G^n} f(x_1, \ldots, x_n)\big[h(x_1 \cdots x_n)/h(e)\big]\,\sigma(\mathrm{d}x_1) \cdots \sigma(\mathrm{d}x_n),$$

pour toute fonction borélienne bornée (ou positive) f sur G^n. Pour simplifier l'écriture, nous noterons ${}^h\mathbb{P}$ la mesure de probabilité ${}^h\mathbb{P}_\sigma$.

Soit h une fonction σ-harmonique positive non nulle. Pour toute fonction f de HG_+ telle que ${}^{f^g}\mathbb{P} \ll {}^h\mathbb{P}$ pour tout $g \in G$, le processus

$$\Big(\frac{f(gX_n)}{h(X_n)}\Big)_{n\geq 0}$$

défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, {}^h\mathbb{P})$, est une martingale positive, relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, qui converge ${}^h\mathbb{P}$-p.s. vers une v.a. $\xi(g,\cdot)$ telle que :

$$f(g)^{f^g}\mathbb{P} = h(e)\xi(g,\cdot)^h\mathbb{P}.$$

Nous choisissons un réel z vérifiant :

$$0 < z < \min\Big\{1, \frac{1}{\sigma(G)}\Big\}.$$

Nous notons λ la mesure positive bornée définie par :

$$\lambda = (1 - z)\sum_{k\geq 1} z^{k-1}\sigma^{*k}.$$

Nous désignons par $C_b(G)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues bornées sur G. Pour toute fonction α de $C_b(G)$, nous posons

$$h^{\alpha\lambda}(g) = \int_G h(ug)\alpha(u)\,\lambda(\mathrm{d}u).$$

Grâce à l'hypothèse (H), on montre que, pour tout $\alpha \in C_b(G)$ et tout $g \in G$, la fonction $h^{\alpha\lambda}(g\cdot)/h^\lambda(\cdot)$ est bornée et par suite ${}^{h^{\alpha\lambda}}\mathbb{P} \ll {}^{h^\lambda}\mathbb{P}$. D'où la formule :

$$h^{\alpha\lambda}(g) = h(e)^{h^\lambda}\mathbb{E}\big[Z_\alpha(g,\cdot)\,\xi(g,\cdot)\big];$$

avec

$$\xi(g,\cdot) = \lim_{n\to+\infty}\frac{h^\lambda(gX_n)}{h^\lambda(X_n)} \quad \text{et} \quad Z_\alpha(g,\cdot) = \lim_{n\to+\infty}\frac{h^{\alpha\lambda}(gX_n)}{h^\lambda(gX_n)}.$$

Considérons l'opérateur de décalage θ sur Ω :

$$\forall n \geq 1, \quad Y_n \circ \theta = Y_{n+1}.$$

Appelons $\tilde{\theta}$ la transformation de $G \times \Omega$ définie par :

$$\tilde{\theta}(g, \omega) = (gY_1(\omega), \theta(\omega)).$$

Nous avons :

$$Z_\alpha \circ \tilde{\theta} = Z_\alpha \text{ et } \xi \circ \tilde{\theta}(g, \omega) = \xi(g, \omega)\, \xi\big(Y_1(\omega), \theta(\omega)\big).$$

Nous montrons que :

(i) les v.a. θ-invariantes sont ${}^{h^\lambda}\mathbb{P}$-presque sûrement constantes, lorsque la fonction h est extrémale;

(ii) pour tout $\alpha \in C_b(G)$, nous avons ${}^{h^\lambda}\mathbb{P}$-presque sûrement

$$\forall (x, g) \in G^2, \quad \lim_{n \to +\infty} \Big(\frac{h^{\alpha\lambda}(gX_n x)}{h^\lambda(X_n)} - Z_\alpha(g, \cdot)\xi(g, \cdot) \frac{h^\lambda(X_n x)}{h^\lambda(X_n)} \Big) = 0.$$

La construction précédente qui s'applique à un groupe LCD général, permet de ramener la description de h à celles des variables $\tilde{\theta}$-invariantes et du *cocycle* ξ. Dans le cas d'un groupe nilpotent, cette description s'obtient directement à partir des assertions (i) et (ii) précédentes. Pour des groupes résolubles plus généraux, le résultat s'obtient en étudiant le comportement asymptotique de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$.

Cette nouvelle approche est analogue à celle utilisée dans [22] pour décrire l'espace vectoriel HG_b des fonctions σ-harmoniques bornées, lorsque σ est de masse 1. Dans ce cas, l'hypothèse (H) n'est plus nécessaire; nous pouvons choisir pour h la fonction identique à 1 et pour f une quelconque fonction σ-harmonique bornée. La description de HG_b est alors ramenée à celle des v.a. $\tilde{\theta}$-invariantes; ce qui est obtenu par l'étude du comportement asymptotique de la *marche aléatoire* $(X_n)_{n \geq 0}$. Cette étude se trouve simplifiée par le fait que la probabilité ${}^1\mathbb{P}$, avec laquelle on travaille, est θ-invariante.

2. Généralités sur les cônes de fonctions harmoniques positives

Une fonction qui est à la fois σ-harmonique positive à gauche et à droite sera dite *bi-σ-harmonique positive.* Nous notons H_+ le cône des fonctions bi-σ-harmoniques positives sur G. Nous appelons $C(G)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur G. Nous désignons par ψ la densité de la mesure λ (voir 1.4) par rapport à la mesure de Haar m_G; ψ est une fonction strictement positive.