Revue d'histoire des mathématiques,
10 (2004), p. 187–256.

RUSSELL ET L'*UNIVERSAL ALGEBRA* DE WHITEHEAD : LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE ENTRE ORDRE ET INCIDENCE (1898–1903)

Sébastien GANDON (*)

RÉSUMÉ. — Cet article a pour objectif de réinsérer les analyses que Russell consacre à la géométrie dans le contexte des discussions sur les fondements de la géométrie à la fin du XIX^{e} siècle. Plus précisément, il vise d'abord à retracer l'influence du premier ouvrage de Whitehead (*A Treatise on Universal Algebra*, 1898) sur les conceptions russelliennes de la géométrie ; il vise ensuite à établir que le concept géométrique fondamental n'est pas pour Russell le concept d'ordre, mais celui d'incidence. Les deux thèses sont intimement liées. C'est en effet la présentation ambiguë que Whitehead propose de la géométrie projective qui contraint Russell, autour de 1898–1899, à définir plus précisément ce qu'il entend par « méthode purement projective », et à développer un système axiomatique qui n'admet comme unique relation primitive que la relation d'incidence. S'appuyant sur l'œuvre de Pieri, Russell continue en 1903 dans les *Principles* à définir la géométrie, non comme une théorie générale de l'ordre, mais comme une théorie générale des relations d'incidence. Les relations d'incidence jouent ainsi un rôle fondamental et méconnu dans la pensée russellienne.

ABSTRACT. — RUSSELL AND WHITEHEAD'S *UNIVERSAL ALGEBRA*: PROJECTIVE GEOMETRY BETWEEN ORDER AND INCIDENCE (1898-1903). — The purpose of this paper is to fit Russell's analyses of geometry into the context of the debate about the foundations of geometry at the end of the XIXth century. More precisely, this article aims, first, to describe the influence of Whitehead's first book (*A Treatise on Universal Algebra*, 1898) on Russell's account of geometry and, secondly, to show that, for Russell, the primitive geometrical notion was not order, but incidence. The two theses are not unrelated. The ambiguity of Whitehead's presentation of projective geometry compelled Russell to redefine, around 1898–1899, the nature of the « real projective method » and to build an axiomatic system in which the only primitive relation is incidence. Drawing from then recent work of Pieri, Russell still defined

(*) Texte reçu le 13 octobre 2003, révisé le 20 septembre 2004.
S. GANDON, PHIER et Département de Philosophie, Université Blaise Pascal, 29 Bd. Gergovie, 63000 Clermont-Ferrand (France).
Courrier électronique : sgandon@wanadoo.fr.
Mots clés : Histoire de la géométrie, ordre, incidence, Russell, Whitehead, Grassmann.
Classification AMS : 01A55, 01A60, 51-03.

geometry in Part VI of the *Principles* (1903) not as a general theory of order but as a general theory of incidence relations. Thus, incidence relations played an important, if unrecognised, part in Russell's thought.

On peut distinguer trois étapes dans l'évolution de la réflexion russellienne sur les fondements de la géométrie dans la période précédant la publication de *The Principles of Mathematics* (1903) : une phase initiale (1896–1897), pendant laquelle Bertrand Russell rédige *An Essay on the Foundations of Geometry* (1897) ; une phase intermédiaire (1898–1899), qui se conclut par la publication dans la *Revue de métaphysique et de morale* de sa réponse à l'article de Henri Poincaré, intitulée « Sur les axiomes de la géométrie » [Russell 1899c][1] ; une phase finale (1900–1903), pendant laquelle, très influencé par les travaux de Mario Pieri et des géomètres italiens, il élabore le Livre VI des *Principles* (1903). Les origines et les motivations de l'étrange axiomatisation que Russell expose dans sa réponse à Poincaré, ainsi que celles des diverses réflexions sur la géométrie que la publication du second volume des *Collected Papers* a rendues récemment accessibles[2], sont, elles, plus difficiles à déterminer. Ce qui frappe, c'est à la fois le caractère mathématiquement très achevé des conceptions russelliennes (la phase « intermédiaire » est de ce point de vue beaucoup moins hésitante et approximative que la phase initiale) et le fait que celles-ci soient moins d'un an après, complètement abandonnées. Quelle est l'origine des analyses russelliennes de 1898–1899 ? À quel genre de pratique mathématique renvoie Russell dans sa réponse à Poincaré ?

La question ne semble pas avoir suscité beaucoup d'intérêt chez les commentateurs. Nicholas Griffin affirme que la tentative russellienne trouve sa source chez Luigi Cremona [Griffin 1990, p. 137]. La conjecture se fonde sur la similitude existant entre les notations des deux auteurs. Mais, comme nous le verrons, le rapprochement n'explique pas le tour très algébrique que Russell donne à sa présentation. Roberto Toretti [1978], lui, rend à Russell l'hommage ambigu d'être parvenu seul et de façon autonome à une précision dans l'expression et dans la formalisation qui le

[1] Le texte, intitulé « Sur les axiomes de géométrie » paraît dans la *Revue de métaphysique et de morale* en novembre 1899. Il constitue une réponse à l'article de Poincaré publié quelques mois avant dans la même revue. Il existe une version anglaise plus longue et plus complète de l'article de Russell [1899d], à laquelle nous nous référerons parfois ici.

[2] Il s'agit de [Russell 1898a, 1898b, 1898c, 1898d, 1899a, 1899b].

rapproche des plus grands de ses contemporains[3]. Mais la simple lecture du « système » russellien exposé en 1899 montre à quel point il ne peut supporter la comparaison avec les grandes œuvres de Pieri et de Hilbert.

Nous voudrions établir que la source d'inspiration principale de Russell, dans cette période charnière qui précède immédiatement la rencontre avec l'école italienne, est le volumineux *Treatise on Universal Algebra* de Alfred N. Whitehead, que le jeune philosophe lit dès sa parution, en 1898[4]. Cette œuvre est, comme nous le verrons, la véritable origine du mystérieux système ébauché par Russell [1899c]. Plus généralement, le détour par Whitehead permet de déterminer la nature exacte des problèmes alors rencontrés par Russell. Il rend ainsi possible une appréhension plus fine des rapports entre le questionnement russellien et les discussions qui lui sont contemporaines sur les fondements de la géométrie. Il permet également de mieux comprendre la phase ultérieure, celle de la rédaction des *Principles* et de la réception de l'œuvre de Pieri et de Peano. L'intérêt que Russell manifeste pour les Italiens ne s'explique en effet pas seulement par leur usage d'une notation enrégimentée. Pieri est, pour l'auteur des *Principles*, celui qui répond à la question que Whitehead a laissée en suspens — celle de la vraie nature de la méthode purement projective.

Dans la première partie de cet article, nous situerons l'ouvrage de Whitehead dans le contexte du débat sur les fondements de la géométrie qui traverse la fin du XIX^e^ siècle. C'est sur le contenu des Livres III et IV du traité de Whitehead [1898] intitulés, respectivement « *Positional Manifolds* » et « *The Calculus of Extension* », que portera la seconde partie. Nous verrons que, influencé par Hermann G. Grassmann, l'auteur subordonne le traitement de la géométrie projective à la division entre multiplicité positionnelle et calcul de l'extension. Dans un troisième moment,

---

[3] Toretti [1978, p. 307] : « [Russell reconnut que Poincaré avait eu raison de critiquer sa prétendue axiomatisation de l'*Essai*] et proposa un nouvel ensemble de six axiomes. Ceux-ci sont énoncés avec une grande précision. [...] Ils sont conçus selon les canons de l'idée moderne de théorie déductive, telle qu'elle est développée par Pasch et l'école italienne. »

[4] Il faudrait même dire « avant sa parution ». Dans la préface de son livre (p. xi), datée de décembre 1897, Whitehead remercie Russell d'avoir relu certaines parties de l'ouvrage, notamment celles consacrées à la géométrie non euclidienne. Pour une évaluation globale de l'impact de [Whitehead 1898] sur Russell et Whitehead, voir [Grattan-Guinness 2002].

nous montrerons comment le système axiomatique développé par Russell [1899c] dans la version anglaise de son article constitue à la fois une reprise et une critique des thèses de Whitehead. L'auteur de *An Essay* refuse que le contenu de la géométrie projective soit démembré en deux systèmes distincts, et il fonde, dans l'article de 1899, sa présentation sur le seul calcul de l'extension compris comme une théorie pure des relations d'incidence. Mais Russell, dans le même temps, comme pris de remords, juxtapose à cet ensemble cohérent de recherches, des développements complètement différents, consacrés aux relations entre géométrie projective et multiplicité positionnelle entendue comme théorie générale des séries. Nous nous pencherons, dans une quatrième partie, sur ces textes, qui manifestent l'existence d'une très profonde tension dans la pensée du philosophe. Russell fonde, à cette époque, la géométrie projective sur les relations d'incidence, sans pour autant renoncer à l'idée qu'il y a un lien essentiel entre la géométrie projective et les relations d'ordre. C'est seulement dans la partie VI des *Principles*, étudiée dans un cinquième et dernier moment, que Russell parvient à concilier les deux points de vue. Le philosophe y maintient l'approche adoptée dans sa précédente réponse à Poincaré selon laquelle la seule notion projective fondamentale est l'incidence ; mais il s'appuie dorénavant sur Pieri pour définir l'ordre à partir de l'incidence et développer sur cette base l'ensemble de la géométrie projective classique. Dans le système développé par Pieri, il y a, certes, des axiomes d'ordre (trois postulats dont le seul but est de garantir que le concept ordinal de segment possède les propriétés adéquates) ; mais, nous y reviendrons, ces énoncés ne forment pas un groupe d'axiomes définissant implicitement le contenu d'un concept (comme c'est le cas habituellement depuis Hilbert) ; la notion de segment est en effet chez Pieri dérivée des relations d'incidence.

1. L'*UNIVERSAL ALGEBRA* ET LA QUESTION DES FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE À LA FIN DU XIX^{e} SIÈCLE

Whitehead entre Grassmann et Klein

Entre 1871 et 1874, Felix Klein publie dans les *Mathematische Annalen* une très importante série d'articles qui posent le cadre dans lequel les discussions autour des fondements de la géométrie se développeront à la fin du XIXᵉ siècle. Généralisant l'approche d'Arthur Cayley, Klein définit la distance entre deux points A et B dans l'espace projectif (tridimensionnel) comme le logarithme du birapport de A et B relativement aux deux points d'intersection de la droite AB et d'une quadrique fondamentale, l'Absolu. Autrement dit, Klein identifie le groupe des déplacements des trois géométries classiques avec le groupe des transformations homographiques qui laissent une surface particulière invariante. Chaque géométrie est donc, à l'intérieur de l'espace projectif complexe, spécifiée par le type de figure considérée comme Absolu : lorsque la surface fondamentale est une quadrique imaginaire à coefficients réels, le groupe de transformation correspond à celui des déplacements elliptiques ; lorsque l'invariant est une quadrique réglée, le groupe sélectionné est le groupe des déplacements hyperboliques ; enfin, lorsque l'Absolu dégénère en une section conique (le cercle imaginaire à l'infini), le groupe de transformation est euclidien. Les relations métriques entre des points quelconques sont donc considérées comme des relations mettant en jeu ces points et une quadrique fondamentale (l'Absolu) au sein de l'espace projectif ; selon le type de surface fondamentale, la géométrie sera hyperbolique, elliptique ou euclidienne.

L'importance des définitions de Klein tient à ce qu'elles permettent de définir la géométrie projective comme la matrice des diverses géométries métriques. Aux yeux du mathématicien allemand, la construction des modèles projectifs manifeste la véritable nature (« *inneres Wesen* ») des géométries euclidienne et non-euclidiennes, qui ne sont que l'étude d'un sous-groupe du groupe projectif. Même s'il est possible, en suivant Toretti [1978, p. 130], d'émettre quelques réserves sur l'interprétation développée, on ne peut que souligner le retentissement considérable de cette approche sur la question des fondements de la géométrie. De très nombreux auteurs ont repris l'idée que la géométrie projective constituait une géométrie générale et fondamentale, englobant sous un même chapeau la géométrie hyperbolique, elliptique et euclidienne. En Angleterre notamment, où la tradition synthétique euclidienne était très forte[5], cette interprétation connut un énorme succès. Russell [1897a, p. 17–53] distinguait ainsi trois étapes dans l'évolution de la géométrie au XIXᵉ siècle : une première phase, inaugurée par Gauss et poursuivie par Bolyai et Lobatchevsky, établit l'indépendance de l'axiome des parallèles par rapport aux autres

[5] Voir sur ce point [Richards 1988].