

LA GENÈSE DU THÉORÈME DE RECOUVREMENT DE BOREL

BERNARD MAUREY & JEAN-PIERRE TACCHI

RÉSUMÉ. — Nous nous proposons de rendre à Émile Borel le mérite d'avoir considéré le premier un recouvrement d'un segment de droite par une suite infinie d'intervalles et prouvé que l'on peut en extraire un sous-recouvrement fini. L'appellation de *théorème de Heine-Borel* souvent donnée à ce résultat, en référence à un article de Heine de 1872, conduit à sous-estimer les différences avec le théorème sur la continuité uniforme (dont une première version peut être attribuée à Dirichlet, en 1854) ; cette dénomination nous paraît ainsi inadéquate. En remplaçant le théorème de recouvrement dans le cadre de la thèse où il figure, en 1894, nous rappelons qu'en l'introduisant, Borel jette en fait les bases d'une nouvelle théorie de la mesure.

Texte reçu le 27 juillet 2004, révisé le 10 juin 2005.

B. MAUREY, Université Paris 7, UFR de Mathématiques, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 (France).

Courrier électronique : maurey@math.jussieu.fr

J.-P. TACCHI, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), case 189 – Combinatoire, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05 (France).

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 01A60, 54-03, 54D30, 28-03, 28A05, 26-03.

Mots clefs : Thèse de Borel, théorème de recouvrement, théorème de Heine, continuité uniforme, mesure et topologie, Émile Borel, Dirichlet, Lebesgue.

Key words and phrases. — Borel's thesis, covering theorem, Heine's theorem, uniform continuity, measure and topology, Émile Borel, Dirichlet, Lebesgue.

Ce texte développe un exposé donné au séminaire d'histoire des mathématiques Cologne-Nancy, tenu à l'université de Nancy 2 le 19 décembre 2003.

ABSTRACT (The Genesis of Borel's Covering Theorem). — We intend to show that Émile Borel was indeed the first to consider a covering of a straight line segment by an infinite sequence of intervals, and to prove that a finite sub-covering can be extracted from it. The name *Heine-Borel theorem*, often given to this result by reference to Heine's article from 1872, leads to an underestimation of the differences between this theorem and that on uniform continuity (a first version of which can be attributed to Dirichlet in 1854); this name thus seems inappropriate. We recast the covering theorem in the context of Borel's thesis, where it appeared, in 1894, and we recall that when Borel proved this result, he actually laid the foundations for a new theory of measure.

1. INTRODUCTION

Le *théorème de recouvrement de Borel* est, à coup sûr, l'un des théorèmes fondamentaux de l'analyse moderne ; sous sa forme d'origine, donnée par Borel en 1894, il s'agit de l'énoncé suivant :

De tout recouvrement de l'intervalle $[0, 1]$ par une suite d'intervalles ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Au delà de cet énoncé particulier, l'extraction de sous-recouvrements finis est devenue la méthodologie fondamentale de la théorie générale de la compacité, dont l'un des points culminants a été le théorème de Tychonoff [1930], sur lequel nous reviendrons dans la conclusion de cet article. Mais nous rappellerons surtout que ce théorème de recouvrement est étroitement lié aux premiers développements par Borel de la théorie moderne de la mesure. Ce faisant, nous n'avançons pas une idée originale : Borel lui-même a souligné ce point très clairement (voir la *Notice* sur ses travaux [Borel 1912b], par exemple p. 121 et p. 134). L'étude de ce mouvement vers la théorie de la mesure est un des fils conducteurs de cet article.

On donne souvent au théorème de recouvrement le nom de *théorème de Heine-Borel*, notamment dans les pays anglo-saxons ; ceci nous conduit à rechercher les racines plus lointaines du résultat. L'histoire du théorème de Borel a déjà suscité plusieurs articles, parmi lesquels [Hildebrandt 1926] et [Dugac 1989]. Nous nous intéresserons naturellement au « rapport Schönflies » [1900] ; l'auteur est le premier qui a relevé une analogie entre la preuve de l'uniforme continuité et celle du théorème de recouvrement de Borel, et inscrit noir sur blanc cette association

« Heine-Borel ». La discussion de cette appellation est un autre fil conducteur ; nous mentionnerons diverses preuves du théorème de recouvrement, apparues entre 1895 et 1905, et nous verrons que certaines d'entre elles sont les héritières des résultats des années 1870–1880, l'époque où apparaissent les premières preuves rigoureuses dans la théorie des fonctions de variable réelle.

Décrivons plus en détail l'organisation de l'article : nous commençons par rappeler dans la section 2 la première démonstration par Borel du théorème de recouvrement, en la replaçant dans le cadre – la thèse de 1894 – où elle fut produite ; nous donnons ensuite, dans la section 3, la preuve par Pierre Cousin d'un résultat très voisin. Cette preuve de Cousin est apparue au même moment que celle de Borel, et elle est restée l'une des façons classiques de démontrer le théorème de recouvrement, mais sans que le nom de Cousin lui soit associé. En fait, la thèse de Cousin est un jalon important de la théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes, et c'est là que Cousin a laissé son nom.

La section 4 est consacrée à l'appellation Heine-Borel du théorème ; nous revenons par conséquent à l'article de Heine [1872] et à son environnement historique ; nous remontons aussi à Dirichlet, suivant ainsi l'idée avancée par Pierre Dugac [1989], qui a vu chez celui-ci les prémices du théorème de recouvrement de Borel. Pour évaluer cette position, nous rappelons dans la section 5 cette preuve de Dirichlet [1854/1904], considérée comme la preuve originelle du théorème sur la continuité uniforme, et nous expliquons pourquoi nous trouvons exagérée la position de Dugac ; pour que le lecteur puisse juger par lui-même, nous donnons en annexe une traduction de l'intégralité de cette preuve. Dans la section 5, nous présentons aussi l'essentiel de la preuve de Heine ; on pourra constater qu'elle est très proche de celle de Dirichlet.

La section 6 est consacrée aux travaux de la période qui s'étend entre l'article de Heine [1872] et la thèse de Borel ; nous mentionnons en particulier Lüroth [1873] et Pincherle [1882], qui ont établi des résultats ayant une certaine parenté avec le théorème de recouvrement. La section 7 est consacrée à la théorie de la mesure selon Borel. Nous y rappelons comment Borel parvient rapidement, en 1898, à la conception de la théorie moderne de la mesure, mais en laisse ensuite le développement à Lebesgue. Cette situation délicate a provoqué des frictions entre

Borel et Lebesgue. Elle a contribué à leur brouille définitive, survenue en 1917–1918.

Au-delà de la question de l'appellation *Heine-Borel*, l'objet de cet article est de mettre en évidence la rupture que cette note de Borel, nourrie des travaux de Cantor, provoque dans l'histoire de l'analyse, en annonçant l'irruption de la théorie de la mesure d'une part et, à plus longue échéance, les grands travaux de topologie générale sur la compacité des années 1920–1930 d'autre part.

2. LA THÈSE DE BOREL

La thèse d'Émile Borel, « Sur quelques points de la théorie des fonctions », présentée à la Faculté des sciences de Paris, est soutenue le 14 juin 1894 devant la commission d'examen, ayant pour président Darboux et pour examinateurs Appell et Poincaré ; Borel a alors 23 ans. La thèse paraît ensuite aux *Annales de l'École normale supérieure* [Borel 1895]. L'importance de cette thèse a été soulignée par Hawkins [1970, p. 97–101], dont nous allons reprendre une partie de l'analyse.

La thèse de Borel est consacrée aux fonctions d'une variable complexe ; à cette époque, le principe suivant était bien établi : si une même expression, telle que la formule de Cauchy, ou la somme d'une série de fonctions analytiques, définit une fonction analytique dans deux ouverts connexes disjoints, disons à l'intérieur et à l'extérieur du cercle unité, il faut en général considérer que l'on est en présence de deux fonctions analytiques totalement distinctes ; Weierstrass a développé ce point de vue, par exemple dans un article qui a été traduit en français [Weierstrass 1881, p. 167]. Si g_1 et g_2 sont deux fonctions continues dans le disque unité fermé, holomorphes dans le disque ouvert, sans aucune relation entre elles, l'expression analytique donnée par la formule intégrale de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{g_1(w) - g_2(w^{-1})}{w - z} dw$$

appliquée au contour Γ égal au cercle unité, fournit un exemple extrêmement convaincant : en effet, $f(z)$ est défini pour tout z non situé sur le cercle Γ , mais est égal à $g_1(z)$ à l'intérieur du cercle, et à $g_2(z^{-1}) - g_2(0)$

à l'extérieur du cercle, deux résultats totalement étrangers. Une autre classe d'exemples est fournie par les séries de la forme

$$(*) \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{\zeta_n - z}$$

où les (ζ_n) sont une suite dense dans le cercle unité, et où la série $\sum |a_n|$ est convergente. Si tous les points du cercle sont des points singuliers pour $f(z)$, alors il faut *certainement* considérer qu'on est en présence de deux fonctions analytiques bien distinctes. Comme Hawkins l'a rappelé, ces exemples de la forme $(*)$ ont été étudiés par Poincaré, dans deux articles sur les *fonctions à espaces lacunaires*; l'exemple qui nous intéresse est déjà dans le premier article [Poincaré 1883], dont il constitue le point essentiel; cet article sera repris et complété quelques années plus tard [Poincaré 1892]; l'exemple $(*)$ y réapparaît p. 203–206.

Borel soutient un point de vue qui va à l'encontre de ce principe établi : il est tout de même possible de trouver, dans certains cas, une relation très forte entre les deux parties de la somme de la série précédente. Pour y parvenir, Borel va présenter ce qui nous semble être l'un des premiers résultats d'existence obtenus par une « méthode probabiliste » (par référence au titre du livre d'Alon et Spencer [1992]). En effet, le ressort de la preuve de Borel est analogue à ce qui se fait de nos jours dans la théorie des graphes aléatoires (voir [Alon & Spencer 1992, chap. 10 et suivants]), ou bien dans la théorie des corps convexes de grande dimension (théorème de Dvoretzky, dans [Pisier 1989, chap. 4, p. 41–59]) : on prouve l'existence d'objets possédant une certaine propriété (P) en montrant que la probabilité pour que (P) ne soit pas satisfaite est < 1 ; mais souvent, on reste incapable de donner un seul exemple *explicite* d'objet possédant cette propriété (P) . Bien sûr, on n'avait pas besoin d'attendre 1894 et Borel pour réaliser, par exemple, qu'étant donné un carré de côté 2 et un cercle de rayon 1 de centre quelconque, il existe des points du carré qui ne sont pas dans le cercle, simplement parce que la surface du cercle est plus petite que celle du carré. Mais Borel forge un outil qui sera fondamental en théorie de la mesure et qui s'appliquera dans une situation où il n'y a plus aucune évidence visuelle.

Précisons le problème de prolongement que se pose Borel : la fonction f donnée par la série $(*)$ est définie à l'intérieur U et à l'extérieur V du cercle unité Γ , et f est analytique dans ces deux ouverts U et V ;