

LE STATUT DE LA GÉOMÉTRIE DANS QUELQUES TEXTES SUR L'HOMOLOGIE, DE POINCARÉ AUX ANNÉES 1930

Alain HERREMAN (*)

RÉSUMÉ. — Le but de cet article est d'analyser le statut de la géométrie dans quelques textes consacrés aux relations d'homologie, depuis les mémoires de Poincaré sur l'*Analysis situs* jusqu'au début des années 1930. Pour cela, nous introduisons la notion de « contenu géométrique » et nous montrons que ce contenu est présent dans les textes de Poincaré, de Veblen et d'Alexander, sans l'être cependant dans ceux d'autres auteurs (Vietoris, Čech). Par ailleurs, l'analyse de certaines distinctions introduites par ces auteurs permet d'apprécier dans quelle mesure l'exigence d'une « signification géométrique » est pour eux contraignante. Cette analyse montre que leurs rapports à la signification géométrique sont variés et elle complète l'analyse du statut de la géométrie obtenue à partir de l'étude du contenu géométrique. Par-delà l'historicité des mathématiques à laquelle ces analyses donnent accès, c'est la diversité sémiotique des textes mathématiques qui est ainsi mise en évidence.

ABSTRACT. — THE STATUS OF GEOMETRY IN VARIOUS CONTRIBUTIONS ON HOMOLOGY, FROM POINCARÉ TO THE 1930s. — This paper sets out to investigate the place and status assigned to geometry in various contributions on the topic of homology relationships, starting with the papers written by Poincaré on *Analysis situs*, and pursuing the issue up to the early 1930s. For that purpose, the concept of «*geometrical content*» is introduced, and is shown to be indeed present in writings by Poincaré, Veblen and Alexander, while it is absent, on the other hand, from the contributions of other authors (Vietoris, Čech). Further, the analysis of certain distinctions introduced by these writers allows an appreciation to be arrived at, of the extent to which their insistence on a «*geometric meaning*» acted as a compelling imperative and constraint in their work. The analysis in fact points to the variety of stances adopted by these mathematicians, with regard to geometric meaning, thus complementing the examination of the status assigned to geometry, on the basis of the analysis of geometrical content. Beyond the historicity of mathematics — as a historical process in the making — thus highlighted by these modes of analysis, the semiotic variance and diversity itself of mathematical writings is thus made manifest.

(*) Texte reçu le 22 mai 1997, révisé le 29 octobre 1997.

Alain HERREMAN, Équipe REHSEIS, Université Paris 7 (Boîte 7064), 2 place Jussieu, 75251 Paris CEDEX 05 (France). Courrier électronique : herreman@paris7.jussieu.fr.

INTRODUCTION

C'est dans son premier mémoire consacré en 1895 à l'*Analysis situs* que Poincaré introduit l'écriture $v_1 + v_2 + \dots + v_\lambda \sim 0$ pour exprimer l'existence, sur une variété donnée, d'une variété ayant pour bord les variétés $v_1, v_2, \dots, v_\lambda$. Il appelle ces relations des *homologies* et affirme qu'elles «*peuvent se combiner comme des équations ordinaires*» [Poincaré 1895, p. 207]. Dès lors, et à l'instar des nombres ou des grandeurs, les variétés deviennent les termes d'un calcul. Ces variétés ne sont pourtant ni des nombres ni des grandeurs, l'*Analysis situs* ayant au contraire pour objet «*l'étude des relations de position des divers éléments d'une figure, abstraction faite de leurs grandeurs*» [Poincaré 1908, p. 39–40]. Ainsi, Poincaré transfère sur des figures géométriques tracées sur une variété des opérations couramment appliquées à des quantités. L'objet de cet article est de préciser le statut de la géométrie dans quelques textes qui, des mémoires de Poincaré jusqu'au début des années 30, ont été consacrés aux relations d'homologie.

Pour préciser le statut de la géométrie dans les mémoires de Poincaré, nous allons commencer par recenser complètement les relations dans lesquelles les variétés s'inscrivent ou les opérations qui leurs sont appliquées. Cela nous permettra de dégager progressivement une caractéristique par laquelle nous définirons le *contenu géométrique* des variétés¹. La manière dont cette notion aura ainsi été définie à partir de l'analyse de l'ensemble des occurrences des variétés dans ces mémoires nous assurera que la caractéristique retenue est bien impliquée dans ceux-ci, dans les énoncés, les démonstrations et dans les remarques qu'ils contiennent. Ayant ainsi donné un sens précis à la notion de contenu géométrique, nous pourrions alors considérer d'autres textes qui recourent aussi aux relations d'homologie et déterminer dans quelle mesure ce contenu géométrique s'y retrouve.

La description du contenu d'une notion étant obtenue par l'analyse des relations qu'elle entretient avec les autres notions d'un texte, elle est

¹ Le mot «contenu» a un sens technique, adapté des travaux sémiologiques de Hjelmslev [1968, 1971, 1985]. Dans cet article, nous avons essayé de réduire au minimum le recours à un vocabulaire technique; le lecteur trouvera des précisions sur cette notion dans Herreman [1996]. Pour des remarques sur l'analyse sémiotique des textes mathématiques, voir Herreman [1998b].

strictement déterminée par ce texte et uniquement rapportée à celui-ci (le texte peut être composé de plusieurs articles, comme c'est le cas des mémoires de Poincaré). L'auteur du texte, en particulier, est ainsi totalement ignoré, comme d'ailleurs bien d'autres aspects, notamment ceux concernant le rapport du texte à d'autres textes. Il est cependant possible, toujours sans introduire d'éléments subjectifs ou extérieurs au texte considéré, de trouver dans celui-ci quelques indications sur le rapport de l'auteur à la signification géométrique de certaines de ses notions. Ce rapport se manifeste par des distinctions ou remarques introduites par l'auteur et liées à la présence ou non d'une signification géométrique. Le concept de signification est ici plus vague que celui de contenu, sa description variant suivant les textes et reposant sur des manifestations souvent uniques. Néanmoins, considérer ces distinctions permet de compléter l'analyse du statut de la géométrie obtenue à partir de la seule étude du contenu géométrique.

Ces analyses nous obligent à accorder une attention particulière au vocabulaire des textes étudiés en raison des identifications et des distinctions qu'il suggère. Suivant l'usage nous utiliserons des guillemets pour indiquer qu'une expression est reprise d'un texte. Nous recourrons fréquemment à ces guillemets mais, quand il n'y aura pas de risque de confusion, nous prendrons la liberté de les omettre pour faciliter la lecture (par exemple, nous ne mettrons pas systématiquement *variété* entre guillemets).

Le corpus que nous avons retenu pour ces analyses comprend, outre les mémoires de Poincaré : le livre *Analysis situs* de Veblen [1922], deux articles d'Alexander [1922 et 1926], un article de Vietoris [1927] et un autre de Čech [1932]. Ces textes ont été choisis pour la diversité de l'intervention du contenu géométrique dont ils témoignent et, d'un point de vue historique, pour l'évolution qu'ils suggèrent. Leur importance mathématique pour l'histoire de la topologie algébrique est par ailleurs incontestable, mais ce n'est pas l'objet de cet article de la mettre en évidence, ni même de la prendre en considération.

1. LE CONTENU GÉOMÉTRIQUE DANS LES MÉMOIRES DE POINCARÉ CONSACRÉS À L'ANALYSIS SITUS

Les définitions des variétés et de l'homologie

Entre les années 1895 et 1902, Poincaré publie six mémoires consacrés à l'*Analysis situs*. C'est dans le premier qu'il introduit pour la première fois les relations d'homologie et le groupe fondamental. Les cinq mémoires suivants sont des « compléments » dans lesquels il revient sur certaines démonstrations et introduit de nouveaux résultats ou de nouveaux exemples². Voici la définition qu'il donne en 1895 des relations d'homologie :

« Considérons une variété V à p dimensions ; soit maintenant W une variété à q dimensions ($q \leq p$) faisant partie de V . Supposons que la frontière complète de W se compose de λ variétés continues à $q - 1$ dimensions

$$v_1, v_2, \dots, v_\lambda.$$

Nous exprimerons ce fait par la notation

$$v_1 + v_2 + \dots + v_\lambda \sim 0.$$

Plus généralement la notation

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 \sim k_3 v_3 + k_4 v_4,$$

où les k sont des entiers et les v des variétés à $q - 1$ dimensions, signifiera qu'il existe une variété W à q dimensions faisant partie de V et dont la frontière complète se composera de k_1 variétés peu différentes de v_1 , de k_2 variétés peu différentes de v_2 , de k_3 variétés peu différentes de la variété opposée à v_3 et de k_4 variétés peu différentes de la variété opposée à v_4 .

Les relations de cette forme pourront s'appeler des homologies.

Les homologies peuvent se combiner comme des équations ordinaires» [Poincaré 1895, p. 206–207].

C'est à partir de cette définition que les nombres de Betti d'une variété V sont introduits : pour un entier m inférieur à la dimension de V , le m -ième nombre de Betti de V est l'entier P_m tel qu'il existe $P_m - 1$ variétés de dimension m sur V qui ne soient liées par aucune relation d'homologie et tel qu'en revanche, toute famille composée de P_m variétés de dimension m soit liée par une telle relation.

² Pour une présentation et une analyse de ces exemples, voir Volkert [1994].

Les termes d'une homologie sont donc des variétés et Poincaré donne, dès le premier mémoire, deux définitions de celles-ci. La première est fondée sur une représentation implicite à partir d'un système d'équations et d'inéquations. La seconde introduit un paramétrage local de la variété et elle est, selon Poincaré, «*évidemment la façon la plus générale possible de définir une variété*» [Poincaré 1899, p. 333]³. Poincaré affirme que les fonctions qui interviennent dans ces définitions peuvent être supposées analytiques puisque les variétés obtenues différeront alors des précédentes d'«*aussi peu que nous voudrions*» [Poincaré 1895, p. 200]. Avec cette hypothèse, il démontre que la deuxième définition est plus générale que la première. Mais Poincaré ne réduit pas les variétés à ces définitions ; il introduit de nouvelles représentations au fur et à mesure que progresse le mémoire et il recourt à l'une ou l'autre d'entre elles quand cela «*facilite singulièrement l'étude*»⁴ [Poincaré 1895, p. 229]. C'est ainsi qu'une variété de dimension 3 peut être représentée par un polyèdre, dont certaines faces sont éventuellement identifiées entre elles (c'est la «représentation géométrique» proposée dans le paragraphe 10 du mémoire de 1895), ou encore par la donnée d'un groupe agissant proprement et de manière discontinue sur l'espace euclidien de dimension 3 («représentation par un groupe discontinu» proposée dans le paragraphe 11 du même mémoire). La représentation par un polyèdre est la plus fréquente et elle intervient dans les trois premiers mémoires.

En fait, Poincaré rapporte rarement les variétés sur lesquelles il raisonne à des systèmes d'équations ou à des paramétrages, et leurs propriétés sont exceptionnellement déduites de ces représentations. Dès lors, pour savoir ce que sont vraiment les variétés dans ces mémoires, il importe de considérer leurs propriétés telles qu'elles ressortent des énoncés des théorèmes, des démonstrations, des remarques, etc., sans se restreindre aux définitions qui en sont données.

Les variétés considérées comme des frontières

Une des principales propriétés des variétés, dans ces mémoires, est de

³ Pour une histoire du concept de variété, voir Scholz [1980].

⁴ Il s'agit en l'occurrence de la représentation d'une variété à partir d'un polyèdre dont certaines des faces ont été «collées» les unes aux autres ; représentation que Poincaré avait considérée dans son étude des groupes fuchsien en 1882 et qui est très souvent reprise dans ses mémoires.