Revue d'histoire des mathématiques,
8 (2002), p. 113–140.

L'AUTRE AXIOME DU CHOIX

Pierre AGERON (*)

RÉSUMÉ. — L'« axiome du choix simple » est le principe selon lequel on peut choisir un élément dans tout ensemble non vide. Cet « autre axiome du choix » a une histoire paradoxale et riche, dont la première partie de cet article recherche les traces et repère les enjeux. Apparaissent comme décisifs le statut de la théorie des ensembles dans les mathématiques intuitionnistes, mais aussi la tension croissante entre technicisation de la logique et réflexion épistémologique des mathématiciens. La deuxième partie procède à un examen détaillé des positions prises dans ce débat par deux mathématiciens considérables qui ne craignaient pas la métaphysique : Arnaud Denjoy et Paul Lévy.

ABSTRACT. — THE OTHER AXIOM OF CHOICE. — The "axiom of simple choice" is the principle according to which one can choose an element from any non-empty set. The first part of this paper attempts to trace the rich and paradoxical history of simple choice. In this story, the most decisive issues appear to be the status of set theory within intuitionistic mathematics and the increasing tension between the technical work of logicians and the epistemological thought of mathematicians. The paper's second part analyzes the attitudes taken in this debate by two prominent French mathematicians who did not fear metaphysics, Arnaud Denjoy and Paul Lévy.

1. LES PARADOXES DU CHOIX SIMPLE

À partir de 1890, quelques mathématiciens groupés à Turin autour de Peano décèlent dans des écrits antérieurs une forme de raisonnement suspecte, mais jusqu'alors passée inaperçue. L'un d'eux, Bettazi, évoque alors la possibilité de l'admettre comme postulat :

(*) Texte reçu le 6 novembre 2001, révisé le 19 juillet 2002.
Les traductions de l'allemand ou de l'anglais ont été effectuées par nos soins à partir des originaux. En quelques rares endroits, les notations mathématiques ont été modifiées pour faciliter les comparaisons.
P. AGERON, Département de mathématiques et de mécanique, Université de Caen, F-14032 Caen cedex.
Courrier électronique : ageron@math.unicaen.fr
Mots clés : Axiome du choix, intuitionnisme, principe du tiers exclu, topos, Arnaud Denjoy, Paul Lévy.
Classification AMS : 01A60, 03-03, 03E25, 03F55, 03G30.

«choisir arbitrairement un élément dans chacun des ensembles d'un nombre infini d'ensembles ne semble pas rigoureux, à moins que l'on ne veuille admettre comme postulat qu'un tel choix puisse se faire, ce qui nous paraît cependant inopportun» [Bettazi 1896, p. 512].

Peano, suspicieux, ne l'incorpore pas à son *Formulaire de mathématiques.*

À Göttingen, Zermelo recourt à son tour à ce «principe logique» qu'il appelle bientôt *axiome du choix* [1] — nous abrégerons en (AC) :

«même pour une totalité infinie d'ensembles, il y a toujours des correspondances qui associent à chaque ensemble un de ses éléments» [Zermelo 1904, p. 516].

Préconisant de l'appliquer «partout, sans hésitation, dans les déductions mathématiques», il le met à l'œuvre pour démontrer une ancienne affirmation de Cantor : *tout ensemble peut être bien ordonné.* La validité de sa preuve provoque une polémique sans précédent.

En France, Borel, Baire, Lebesgue et Hadamard échangent leurs sentiments dans «Cinq lettres sur la théorie des ensembles», rassemblées par Borel et vite devenues classiques [Borel 1905b]. Seul Hadamard admet sans difficulté la méthode de Zermelo, les trois autres savants sont très réservés. Cependant, Lebesgue va beaucoup plus loin, confessant à Borel :

«je vois déjà une difficulté dans ceci : "dans un [ensemble] déterminé, je puis choisir un [élément] déterminé", puisqu'il existe des ensembles [...] dans lequels il est peut-être impossible de choisir un élément [Lebesgue 1905, p. 299].»

Ainsi, alors que la controverse porte sur la possibilité de choix multiples :

(AC) *sur tout ensemble M d'ensembles non vides, il existe une fonction f telle que $f(X) \in X$ pour tout $X \in M$,*
il interroge déjà le «principe du choix simple», c'est-à-dire le cas particulier obtenu en supposant M réduit à un seul élément $X \neq \emptyset$:

(AC_1) *si un ensemble X est non vide, il existe un élément dans X.*

Ce dernier énoncé a l'apparence d'une parfaite pétition de principe [2] :

---

[1] Sur l'histoire de cet axiome, voir [Moore 1982] et [Cassinet-Guillemot 1983].

[2] La pétition de principe opère «une distinction hallucinatoire [...] entre deux pensées qui sont en réalité indiscernables, et ce afin d'établir – ou de prétendre établir – la vérité de l'une par la force argumentative de l'autre» [Rosset 1997, p. 27].

être non vide ne signifie-t-il pas précisément posséder au moins un élément ? Non, répond Lebesgue, sauf à postuler l'identification logique de deux formes d'existence philosophiquement fort différentes : existence idéale (abstraite) et existence kroneckérienne (constructive). Il tire un exemple de sa thèse, où il a montré par un simple argument de cardinalité l'existence dans $\mathbb{R}$ de sous-ensembles mesurables et non boréliens. Puis il note qu'à cette première difficulté du choix simple, le raisonnement de Zermelo ajoute «ensuite la difficulté relative à l'infinité des choix». En l'absence de toute théorie axiomatique, sa perspicacité est admirable : il a compris que si le principe du choix (général) va beaucoup plus loin que le principe du choix simple, ce dernier n'a déjà rien d'anodin.

En 1908, Zermelo propose d'asseoir la théorie des ensembles sur sept axiomes. L'axiome III, dit de séparation, est une forme restreinte de compréhension, destinée à éviter les paradoxes du type Russell : il affirme, pour tout ensemble M donné, l'existence du sous-ensemble formé des éléments de M satisfaisant une formule donnée. L'axiome VI est celui du choix, qui troque ainsi son statut précédent de principe logique contre celui de postulat d'une théorie «purement mathématique» [Zermelo 1908b]. Ainsi se fait jour une ambivalence du statut, logique ou ontologique, de l'axiome de Zermelo, sur laquelle nous reviendrons.

La même année, Brouwer inaugure la critique intuitionniste de la logique [Brouwer 1908]. Il rejette en particulier le principe du tiers exclu

(TE) *pour toute proposition P, on a P* ou *non P*,

qu'il identifie à la croyance hilbertienne, naïve et démesurée, en la résolubilité de tous les problèmes mathématiques. Ce faisant, on peut considérer, sur le plan épistémologique, qu'il prolonge et systématise la critique bégienne du choix d'un élément dans un ensemble. En effet, nous allons constater que *le principe du choix simple est équivalent au principe du tiers exclu.* Le point essentiel est ici que l'équivalence entre ces deux principes ne repose que sur des inférences échappant à la critique intuitionniste. (Pour une introduction élémentaire au raisonnement intuitionniste, nous renvoyons à [Ageron 2000].)

Montrons d'abord que (TE) implique (AC_1). Supposons que X est un ensemble non vide. D'après (TE), X a au moins un élément ou X n'a aucun élément. Mais le deuxième cas est exclu, car l'ensemble vide est (par l'axiome d'extensionnalité) le seul ensemble qui n'a aucun élément.

Ainsi X a au moins un élément, ce qu'il fallait démontrer.

Montrons maintenant que (AC_1) implique (TE). Fixons pour cela une proposition P, et associons-lui (par l'axiome de séparation) le sous-ensemble X de $\mathbb{N}$ formé des entiers naturels n qui satisfont l'énoncé :

$$(n = 0) \ et \ (P \ ou \ non\, P).$$

Cet ensemble n'est pas vide : s'il l'était, 0 ne serait pas élément de X, ce qui impliquerait *non* (P *ou non* P), donc *non* P *et non non* P, mais ceci est une contradiction. L'application de (AC_1) montre alors que 0 est dans X. On a donc P ou *non* P, ce qu'il fallait démontrer.

Trois remarques doivent être faites au sujet de ce raisonnement.

La première est que l'axiome de séparation formulé par Zermelo ne s'appliquait qu'à une formule « bien définie », en un sens très imprécis. Dans la démonstration qu'on vient de donner de $(AC_1) \Rightarrow (TE)$, on ne prouve donc P *ou non* P que si P est « bien définie », faute de quoi l'existence de l'ensemble X associé n'est pas garantie. Avec le point de vue qui s'imposera plus tard — celui de [Skolem 1923], anticipé dans [Weyl 1910] —, il suffit que P soit un énoncé du premier ordre de la théorie des ensembles — donc, en un sens, une quelconque proposition mathématique.

Deuxième remarque, cruciale : le raisonnement ci-dessus n'a jamais été tenu par Brouwer, et il ne pouvait l'être. Brouwer rejetait en effet la conception abstraite d'ensemble induite par l'axiome de séparation de Zermelo. Il a ainsi été conduit à développer en 1918–1919 une théorie des ensembles si éloignée de la théorie classique qu'il préférera plus tard parler de « déploiements ». Ce n'est pas avant 1970 qu'on prendra conscience que des théories des ensembles d'esprit plus cantorien sont parfaitement possibles indépendamment de (TE). Cela explique que le principe du choix simple, version ensembliste de (TE), n'ait jamais été un enjeu dans le vigoureux débat entre les partisans de Brouwer et ceux de Hilbert : pour les uns, c'est une abstraction dépourvue de sens ; pour les autres, c'est une pétition de principe.

Troisième remarque, peut être la plus surprenante : nous n'avons utilisé qu'un cas très particulier de (AC_1) pour en déduire (TE), dans la mesure où les ensembles X auxquels cet axiome a été appliqué n'ont, au plus, qu'un élément. Ainsi l'essence du choix simple n'est pas, contrairement aux apparences, celui du choix *entre plusieurs* éléments, mais la simple affirmation de la présence d'un élément dans un ensemble dont on sait tout à la fois qu'il n'en n'est pas dépourvu et qu'il n'en contient qu'un au plus !

En 1921, Abraham Fraenkel ajoute aux axiomes de Zermelo un « axiome de remplacement » qu'il énonce ainsi :

« Si M est un ensemble et si chaque élément de M est remplacé par un "objet du domaine $\mathcal{B}$", alors M se transforme en un nouvel ensemble » [Fraenkel 1921, p. 97].

L'année suivante, examinant le problème de l'indépendance de l'axiome du choix relativement aux autres axiomes, il fait trois remarques :

a) les différents choix simples ne posent pas de difficulté ;

b) les autres axiomes donnés par Zermelo ne permettent pas de montrer que la totalité des objets choisis forme un ensemble ;

c) avec son nouvel axiome, le remplacement, cela semble possible :

« en effet, d'après cet axiome, l'ensemble obtenu à partir de M en remplaçant chacun des ensembles (non vides) $X, Y, \ldots$ par l'un de ses éléments existe » [Fraenkel 1922a, p. 233].

L'axiome du choix semble donc démontré, au moyen de l'axiome de remplacement. Le raisonnement c) est-il correct ? À vrai dire, avec l'énoncé ci-dessus de l'axiome de remplacement, où rien n'est dit au sujet de la fonction de remplacement, il n'est guère falsifiable. Mais comme pour l'axiome de séparation, Fraenkel adopte très vite le point de vue de Skolem [1923] : considérer le remplacement comme un *schéma d'axiomes du premier ordre* (en quelque sorte un moule à axiomes, qui en engendre autant qu'on peut écrire de formules définissant une relation fonctionnelle avec les symboles logiques et le signe d'appartenance $\in$). En ajoutant ce schéma aux axiomes de Zermelo, en ajoutant encore l'axiome dit de fondation[3] (qui exclut des pathologies indésirables), on obtient la théorie du premier ordre qu'on note aujourd'hui ZF (parfois ZFC). Fraenkel conjecture alors que, contrairement à son impression première, (AC) n'est pas conséquence des autres axiomes de ZF. Il construit (essentiellement) un contre-modèle, satisfaisant tous les axiomes de ZF, sauf l'axiome du choix et l'axiome de fondation [Fraenkel 1922b]. La construction d'un contre-modèle satisfaisant l'axiome de fondation, nettement plus délicate,

[3] L'axiome de fondation peut s'exprimer ainsi : Pour tout ensemble M d'ensembles dont chacun a au moins un élément, il existe un élément de M qui est disjoint de M.