

**GÉOMÉTRIE DES TISSUS.  
MOSAÏQUES. ÉCHIQUIERS.  
Mathématiques curieuses et utiles**

Anne-Marie DÉCAILLOT (\*)

---

**RÉSUMÉ.** — Dans la deuxième moitié du XIX<sup>e</sup> siècle, une ambition commune anime le groupe de mathématiciens dont les travaux sont présentés ici : contribuer à la diffusion de l'esprit scientifique auprès d'un large public. Le lieu d'expression de ce groupe est l'Association française pour l'avancement des sciences, créée en 1872, après la défaite de la France au cours du conflit franco-prussien. Rendre la science populaire, tel est le but poursuivi. Afin de répondre à cet objectif, les questions mathématiques abordées sont issues de problèmes concrets, où se trouve privilégiée une représentation visuelle simple. Leur résolution met en jeu un instrument commun : l'échiquier. Il permet, autour de la géométrie des tissus d'Édouard Lucas, de traiter la théorie des nombres. La construction des mosaïques de Charles-Ange Laisant rejoint la représentation des groupes finis et la cristallographie. Les échiquiers anallagmatiques de James-Joseph Sylvester apparaissent sous forme de récréations mathématiques, avant de devenir matrices et d'attirer l'attention de Jacques Hadamard. Une analyse de l'impact de ces recherches en leur temps est effectuée, ainsi qu'une étude des développements qu'elles connaissent de nos jours.

**ABSTRACT.** — **THE GEOMETRY OF FABRICS. MOSAICS. CHESSBOARDS. CURIOUS AND USEFUL MATHEMATICS.** — In the second half of the nineteenth century, the group of mathematicians whose work will be analyzed here was driven by a common ambition : to contribute to the diffusion of science to a wide audience. As their platform, they chose the French Association for the Advancement of Science, a society founded in 1872 after France's defeat in the Franco-Prussian War. They aimed to make science popular. In order to achieve this goal, they treated mathematical questions originating in concrete problems and favored simple visual representations.

---

(\*) Texte reçu le 4 avril 2002, révisé le 24 octobre 2002.

A.-M. DÉCAILLOT, UFR de mathématiques et informatique, Université de Paris V, 45 rue des Saints Pères, 75006 Paris.

Courrier électronique : [deca@math-info.univ-paris5.fr](mailto:deca@math-info.univ-paris5.fr).

Mots clés : arithmétique, réciprocité quadratique, entiers de Gauss, résidus quadratiques, réseaux, pavages du plan, groupes finis, AFAS, Édouard Lucas, Thorvald Thiele, Charles-Ange Laisant, James-Joseph Sylvester.

Classification AMS : 01A55, 01A60, 01A74, 06-03, 11-03.

Their solutions employed a common tool : the chessboard. The latter suggested, as in the case of Édouard Lucas's geometry of fabrics, number-theoretic results. The construction of Charles-Ange Laisant's mosaics related to the representation of finite groups and crystallography. James Joseph Sylvester's anallagmatic chessboards represented examples of recreational mathematics before their transformation into the matrices attracted the attention of Jacques Hadamard. This article explores the impact of this research in its day, as it examines contemporaneous developments of this nature.

« Pour que l'esprit acquière de la facilité, il faut l'exercer à travers les choses que d'autres ont déjà découvertes, et à parcourir avec méthode même les arts les plus communs, surtout ceux qui expliquent l'ordre ou le supposent [...]. Comme tous les esprits ne sont pas également aptes à découvrir tout seuls la vérité, cette règle nous apprend qu'il ne faut pas tout à coup s'occuper de choses difficiles et ardues, mais commencer par les arts les moins importants et les plus simples, ceux surtout où l'ordre règne, comme sont les métiers du tisserand, du tapissier, des femmes qui brodent ou font de la dentelle; comme sont encore les combinaisons des nombres, et tout ce qui a rapport à l'arithmétique, tant d'autres arts semblables en un mot, qui exercent merveilleusement l'esprit, pourvu que nous n'en empruntions pas la connaissance aux autres, mais que nous les découvriions nous-mêmes. »

René Descartes, *Regulae ad directionem Ingenii*, Règle 10<sup>1</sup>

\*\*\*

## INTRODUCTION

Les questions que pose la nature des pratiques scientifiques paraissent aussi multiples et anciennes que les productions de la science même. Parmi celles-ci l'interrogation sur les pratiques que l'on peut dans un premier temps qualifier de « marginales », au sein d'une communauté scientifique structurée, n'est pas à dédaigner. Cette notion de marge résiste-t-elle à un examen historique sérieux ? L'étude qui suit tente d'ébaucher quelques éléments de réponses à ce questionnement. Certains des mathématiciens, étrangers ou français, dont nous présentons les travaux, ne sont en rien des personnalités marginales de leur discipline. Leur œuvre fondamentale les conduit à ne négliger ni les mathématiques pratiques, ni les questions récréatives, qu'apprécient les amateurs de sciences et qui, selon René Descartes, « exercent merveilleusement l'esprit ». Ces intérêts convergent avec ceux de mathématiciens de moindre renommée et nous tenterons d'en analyser les fondements communs.

---

<sup>1</sup> Traduction française de Victor Cousin ; voir [Descartes, *Œuvres* 1, p. 167–169].

### ***Les hommes***

Une première caractéristique des hommes, dont l'œuvre est étudiée ici, est d'être liés aux sociétés savantes et associations scientifiques de leur temps, en tout premier lieu l'*Association française pour l'avancement des sciences* (AFAS) et la *Société mathématique de France* (SMF), toutes deux apparues en 1872. Un savant comme James-Joseph Sylvester, membre éminent de la *British Association for the Advancement of Science* (BAAS), participe aux tout premiers congrès de l'AFAS, où l'on remarque également les interventions d'Ole Broch, professeur de mathématiques à l'université de Christiania, et la présentation des travaux de l'astronome danois Thorvald Thiele. Les congrès de l'AFAS attirent les participations actives d'Eugène Catalan, de Charles-Ange Laisant ou d'Édouard Lucas, par ailleurs membres de la SMF ; leurs travaux paraissent dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, de même que ceux du comte de Polignac ou de Jacques Hadamard, aussi bien que dans les *Comptes rendus* annuels de l'association<sup>2</sup>.

Porteuse d'une démarche originale, l'AFAS permet aussi l'expression scientifique de personnalités parfois éloignées du milieu académique. Son ambition est de mêler l'activité de savants confirmés à celle de simples amateurs de science, dans un souci de diffusion et de popularisation de la science, constitutif de son avancement. Quelques éléments d'analyse, permettant d'appréhender le rôle de cette association dans un contexte historique déterminé, sont donnés ci-dessous.

L'influence de ces sociétés savantes, la nécessité de présenter des travaux accessibles à un public diversifié, ou le goût personnel des auteurs pour les mathématiques pratiques, orientent les interventions dont nous faisons ici l'étude vers les applications de la science. Ainsi Henri Sainte-Claire Deville, professeur de chimie à l'École normale supérieure, peut-il écrire à propos de son ancien élève Édouard Lucas : « Il est très ingénieux et son calcul des tissus est chose curieuse et utile »<sup>3</sup>.

### ***Les mathématiques***

La présentation d'une science utile apparaît comme une condition de

---

<sup>2</sup> On peut remarquer que la *Société philomatique de Paris* compte Eugène Catalan, depuis 1840, parmi ses membres et Charles-Ange Laisant depuis 1878.

<sup>3</sup> Lettre au Ministre de l'instruction publique, juillet 1871, conservée aux Archives nationales, désormais AN, dossier [F/17/22970].

sa diffusion, tandis que sa popularisation est assurée par les résultats « curieux » auxquels elle permet d'accéder. Ce sont les observations curieuses sur les objets mathématiques qui vont en retour éveiller la curiosité du public, son intérêt pour l'avancement de la science.

Pour toucher un public allant au-delà des lecteurs de revues fondamentales, comme l'*American Journal of Pure and Applied Mathematics* créé en 1878 à Baltimore, Sylvester a recours à la publication originale et populaire de « Mathematical Questions » dans l'*Educational Times*. Catalan fonde en Belgique la revue *Nouvelle correspondance mathématique* et les activités de diffusion de la science de Laisant présentent de multiples aspects : fondateur avec Émile Lemoine de *L'Intermédiaire des mathématiciens* en 1894, il dirige les *Nouvelles annales de mathématiques* en 1896 et, avec Henri Fehr, crée en 1899 la revue genevoise *L'Enseignement mathématique*<sup>4</sup>.

Cette frange de mathématiciens préoccupés de populariser leur discipline privilégient une présentation imagée et visuelle de la science. On peut remarquer que Sylvester [1867, p. 461] propose ses pavages anallagmatiques à la réflexion de l'analyste dans son bureau, aussi bien qu'à celle de la femme élégante dans son boudoir. Édouard Gand, professeur de dessin dans l'industrie du tissage, souhaite voir « la femme du monde », exercée au travail à l'aiguille sur canevas, lire ses ouvrages sur la construction des satins ; alors l'élégante brodeuse « sans trop s'effrayer de quelques formules aussi faciles à retenir qu'aisées à comprendre [...] finira par créer une foule de dessins mosaïques, de combinaisons géométriques, de casse-tête, d'agencements chinois, moresques, grecs, égyptiens, etc. » [Gand 1867b, p. 300].

Le souci de diffusion scientifique n'est pas exempt d'une recherche esthétique dans les représentations : les dessins de tissage des satins carrés sont jugés les plus élégants, les mosaïques complexes de Thiele frappent par leur beauté, celles de Laisant par l'enchaînement de leurs symétries. L'harmonie visuelle d'un canevas, d'un satin ou d'une mosaïque est liée à l'existence de régularités, de symétries dans leurs schémas. Le problème de

---

<sup>4</sup> C.-A. Laisant deviendra par ailleurs secrétaire de la commission permanente du *Répertoire des sciences mathématiques*, sous la présidence de Henri Poincaré, et sera responsable de la partie mathématique de la *Grande encyclopédie, inventaire raisonné des sciences, des lettres et des arts* (1885-1902, 31 vol.), Larousse, dirigée par Marcelin Berthelot.

la recherche de motifs ornementaux invariants par translations, rotations, symétries paraît très ancien aussi bien en peinture, sculpture, architecture, que dans l'art de la céramique ou du carrelage. Hermann Weyl [1952] souligne la grande variété d'applications du principe de symétrie dans les arts, depuis l'art persan, grec ou arabe, dans la nature organique ou minérale (cristallographie), avant de parvenir à la notion d'invariance d'une figure par un groupe de transformations. De la notion esthétique sensible se dégage l'idée mathématique abstraite. La beauté d'une œuvre est mise en relation avec une théorie, et l'interprétation esthétique peut apparaître comme l'affirmation de la beauté des mathématiques elles-mêmes.

Dans la présentation des problèmes, les différents intervenants ont recours à un instrument commun : l'échiquier. On peut y déceler l'influence des cartons Jacquard<sup>5</sup> au sein de la géométrie des tissus. Grâce à une géométrie visuelle simple, l'échiquier rend accessibles d'abstraites notions d'algèbre, de combinatoire ou de probabilités<sup>6</sup>.

Un autre trait des travaux mathématiques que nous présentons est d'incorporer beaucoup de résultats théoriques. La maîtrise des structures complexes d'un savoir formalisé n'est pas étrangère à la perception des problèmes, au « sens pratique » du savant qui met en œuvre ce savoir, selon la formulation de Pierre Bourdieu [2001]. Ce savoir renvoie en particulier aux recherches initiées par Joseph-Louis Lagrange et Carl Friedrich Gauss dans le domaine de la théorie des nombres. On peut supposer que la traduction française de 1807 des *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss contribue largement à la diffusion de ces thèmes dans le milieu associatif français, de même que la réédition en 1830 de la *Théorie des nombres* d'Adrien-Marie Legendre.

Ainsi la référence à la théorie des congruences et aux recherches de Gauss est-elle explicite dans la géométrie des tissus d'Édouard Lucas et

---

<sup>5</sup> Après Bouchon, Falcon et Vaucanson, le mécanicien lyonnais Joseph-Marie Jacquard (1752–1834) perfectionne le métier à tisser en mécanisant l'opération qui conditionne la levée des fils de chaîne, grâce à des cartons perforés appelés depuis « cartons Jacquard ». D'abord hostiles à son invention, les canuts lyonnais brisent plusieurs métiers Jacquard ; mais dès 1812, ces derniers se généralisent en France.

<sup>6</sup> Ainsi Henri Delannoy, entre 1889 et 1895, présente à l'AFAS plusieurs communications sur l'emploi de l'échiquier dans la résolution de problèmes concernant le calcul des probabilités liés en particulier à la ruine du joueur.