ARNAUD BEAUVILLE

Surfaces algébriques complexes

Astérisque, tome 54 (1978)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1978__54__R1_0>

INTRODUCTION

Ce texte reproduit, avec quelques modifications, le contenu d'un cours de 3e cycle donné à Orsay en 1976-77. Le but de ce cours était de donner une présentation de la classification d'Enriques des surfaces algébriques complexes qui soit relativement élémentaire, c'est-à-dire accessible à un étudiant connaissant le langage de base de la géométrie algébrique (diviseurs, formes différentielles...) ainsi que la cohomologie des faisceaux. J'ai cependant préféré admettre en cours de route quelques théorèmes difficiles de géométrie algébrique, plutôt que de recourir à des démonstrations compliquées et artificielles.

Voici le plan de ce cours. Les deux premiers chapitres, de nature préliminaire, introduisent les outils de base pour l'étude des surfaces : on définit au chapitre I la forme d'intersection sur le groupe de Picard et on établit ses propriétés ; on en déduit, en admettant le théorème de dualité, les formules fondamentales de la théorie (théorème de Riemann-Roch, formule du genre). Le chapitre II est consacré à la structure des applications birationnelles ; on montre notamment que toute surface est obtenue à partir d'une surface minimale par un nombre fini d'éclatements. Le chapitre se clôt sur le critère de contraction de Castelnuovo, qui caractérise les droites exceptionnelles par leurs propriétés numériques.

La classification des surfaces commence au chapitre III avec les surfaces réglées, c'est-à-dire birationnellement isomorphes au produit d'une courbe C par $\mathbb{P}^1$. On démontre (excepté dans le cas rationnel) que leurs modèles minimaux sont les fibrés en droites projectives de base C, et on étudie la géométrie de ces fibrés. Le chapitre IV est consacré à des exemples de surfaces rationnelles ; on y feuillette le riche herbier amassé par les géomètres du 19e siècle (surface de Veronese, surfaces de del Pezzo...).

Les deux chapitres suivants constituent peut-être la clé de voûte de la classification ; il s'agit de caractériser les surfaces réglées par leurs propriétés numériques - plus précisément par l'annulation des "plurigenres" P_n. Le cas des surfaces avec $q=0$ est traité au chapitre V avec le théorème de Castelnuovo : une surface vérifiant $q=P_2=0$ est rationnelle. On en déduit deux conséquences importantes, la structure des surfaces rationnelles minimales et l'unicité du modèle minimal d'une surface non réglée. Au chapitre VI, on aborde les surfaces avec $q>0$. On montre sans trop de peine qu'une surface satisfaisant à $p_g=0$, $q\geqslant 2$ est réglée ; il reste donc à traiter certaines surfaces non réglées avec $p_g=0$, $q=1$. Suivant une idée d'Enriques, on classifie très précisément ces surfaces, ce qui permet de montrer qu'elles vérifient $P_{12}>0$. Une surface est donc réglée si et seulement si $P_{12}=0$ (théorème d'Enriques).

Le chapitre VII, très bref, introduit la dimension de Kodaira $\varkappa$, qui fournit un langage commode pour la classification des surfaces. Les surfaces réglées sont caractérisées par $\varkappa=-\infty$; les trois chapitres suivants étudient les surfaces avec $\varkappa=0$, 1 et 2. Les surfaces avec $\varkappa=0$, traitées au chapitre VIII, se répartissent en 4 classes : surfaces K3, surfaces d'Enriques, surfaces abéliennes et surfaces bielliptiques. La liste des surfaces bielliptiques a été donnée au chapitre VI, dans le cadre des surfaces avec $p_g=0$, $q=1$; on étudie ici les surfaces K3 et les surfaces d'Enriques, en donnant de nombreux exemples.

Au chapitre IX on montre que les surfaces avec $\varkappa = 1$ possèdent un pinceau (pas nécessairement rationnel) de courbes elliptiques ; inversement, on étudie les surfaces qui admettent un tel pinceau.

Enfin le chapitre X est consacré aux surfaces avec $\varkappa = 2$, dites de type général ; bien que ces surfaces soient les plus générales, on ne sait en dire que peu de choses. On s'est contenté ici de donner des exemples et de démontrer l'inégalité de Castelnuovo : $\chi(\mathcal{O}_S) > 0$.

On a énoncé dans un Appendice les résultats de Bombieri et Mumford sur la classification des surfaces en caractéristique p .

Il est difficile de prétendre à l'originalité dans un sujet où l'essentiel des théorèmes a été démontré vers 1900. Je me suis inspiré largement de la littérature existante, en particulier du séminaire Chafarevitch ([Ch 1]) ; j'ai essayé de retracer, dans une note historique après chaque chapitre, l'origine des principaux théorèmes. J'ai indiqué sous forme d'exercices quelques prolongements possibles du cours.

Je tiens à remercier ici les fidèles auditeurs du cours, en particulier M. Demazure et M. Raynaud, qui par leurs observations pertinentes m'ont permis d'améliorer la version orale de ce texte. Je remercie également Madame Bonnardel pour la qualité remarquable de sa frappe.