

Astérisque

D. CERVEAU

J.-F. MATTEI

Formes intégrales holomorphes singulières

Astérisque, tome 97 (1982)

http://www.numdam.org/item?id=AST_1982__97__1_0

© Société mathématique de France, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TABLE DES MATIÈRES

Index	4
<u>0. Introduction</u>	5
<u>Première partie : Notions fondamentales et résultats préliminaires.</u>	
<u>Chapitre I : Feuilletage singulier et holonomie</u>	18
1. Feuilletage singulier	18
2. Eclatement d'un point	19
3. Eclatement d'un germe de feuilletage singulier	20
4. Réduction d'un germe de 1-forme holomorphe en $0 \in \mathbb{C}^2$	21
5. Holonomie des variétés intégrales des formes réduites	24
6. Holonomie projective	25
<u>Chapitre II : Séparatrices d'une forme intégrable holomorphe</u>	28
1. Notions de séparatrices	28
2. Existence de séparatrices	29
3. Majoration du nombre de séparatrices en dimension 2	29
4. Description d'un feuilletage singulier au voisinage d'une courbe intégrale et paramétrisations invariantes	30
<u>Chapitre III : Facteurs intégrants et symétries</u>	34
1. Notion de facteur intégrant et de symétrie	34
2. Existence d'intégrales premières en présence de symétries	37
3. Les formes modèles $\omega_{m,\lambda}$; connexion avec des feuilletages donnés par les actions linéaires abéliennes	40
4. Quelques remarques et conséquences	46
5. Extension des facteurs intégrants holomorphes	47
<u>Deuxième partie : Recollement d'intégrales premières multiformes</u>	
<u>Chapitre I : Etude d'un cas particulier</u>	53
1. Formes à cône tangent générique	53
<u>Chapitre II : Le cas général</u>	57
1. Généralités sur les fonctions multiformes	57
2. Recollements d'intégrales premières multiformes	60
<u>Troisième partie : Critère topologique assurant l'existence d'intégrales premières multiformes - Un contre exemple dans le cas méromorphe.</u>	
<u>Chapitre I : Un critère topologique d'existence d'une intégrale première .. multiforme du type $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$, $\lambda_j > 0$, $f_j \in \mathcal{O}_n$</u>	68

1. Surfaces de niveau des fonctions multiformes du type $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$	69
2. Démonstration du théorème 1.	71
<u>Chapitre II</u> : La non existence d'un critère topologique pour l'existence d'une intégrale première méromorphe	74
<u>Quatrième partie</u> : <u>Généricité</u> .	
<u>Chapitre I</u> : La structure de l'ensemble algébrique \mathbb{J}_ν des formes intégrales homogènes de degré ν .	86
0. Préliminaires	86
1. Stratification de \mathbb{J}_ν	87
2. Le lieu singulier des formes homogènes intégrables	94
<u>Chapitre II</u> : Un critère algébrique générique d'existence d'intégrales premières multiformes du type $f = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$	96
1. Formes domestiques et apprivoisées	96
2. Le théorème principal	97
<u>Cinquième partie</u> : <u>Problèmes de convergences et structure algébrique de l'ensemble des intégrales premières.</u>	
<u>Chapitre 0</u> : Historique et rappel des résultats connus	102
<u>Chapitre I</u> : Convergence des séparatrices	104
1. Convergence des séparatrices	104
<u>Chapitre II</u> : Convergence des intégrales premières méromorphes	106
1. Enoncé des résultats et préliminaires	106
2. Démonstration du théorème 1.1 en dimension 2	108
3. Démonstration dans le cas semi-divergent en dimension supérieure	110
4. La méthode de H. Dulac dans le cas semi-divergent, $n = 2$.	111
5. Démonstration du théorème 1.1 dans le cas général	113
<u>Chapitre III</u> : Convergence des intégrales premières multiformes	114
1. Préliminaires sur les intégrales premières formelles $F = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$	114
2. Critères de convergence	118
<u>Chapitre IV</u> : Facteurs intégrants et formes normales : le problème de la convergence des formes normales	124
1. Rappels sur les formes normales des champs holomorphes	124
2. Convergence des formes normales en présence de symétries dans le cas réduit	129
3. Quelques remarques lorsque la partie homogène est générique	134
<u>Chapitre V</u> : Structure algébrique de l'ensemble des intégrales premières	137

TABLE DES MATIÈRES

0. Rappel de la structure des intégrales premières formelles et holomorphes usuelles	137
1. Intégrales premières méromorphes minimales	137
2. Démonstration en dimension 2	138
3. Démonstration en dimension supérieure	139
4. Description de l'ensemble des facteurs intégrants et des structures transverses	140
<u>Sixième partie : Quelques propriétés des diverses intégrales premières.</u>	
<u>Détermination finie et singularités quasi-homogènes.</u>	
<u>Chapitre I : Détermination finie des germes de fonctions méromorphes en dimension 2</u>	
1. Ensemble critique d'une fonction méromorphe	148
2. Détermination finie	149
<u>Chapitre II . Détermination finie faible des fonctions multiformes du type $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$</u>	
1. L'ensemble critique d'un germe de fonction multiforme	153
2. Détermination finie d'hypersurfaces	156
3. Détermination finie faible	160
4. Remarques et conséquences	162
<u>Chapitre III : Singularités quasi-homogènes des fonctions multiformes $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$</u>	
1. Rappels - définitions et premières propriétés	164
2. Critères suffisants de quasi-homogénéité	167
3. Formes normales des singularités quasi-homogènes	173
<u>Chapitre IV : Problèmes d'homogénéisation</u>	
1. Homogénéisation en dimension deux	176
2. Symétries holomorphes des perturbations des formes domestiques	178
3. Homogénéisation des formes $\omega = f_1 \dots f_p \sum \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ à partie homogène générique en présence de symétrie en dimension $n = 3$	181
<u>Quelques problèmes ouverts</u>	187
<u>Bibliographie</u>	189

Ce volume est composé de six parties ; le code des références internes est le suivant :

[I ; II ; 5.2] signifie partie I, chapitre II, paragraphe 5, énoncé 2.

[II ; 3.4] signifie chapitre II, paragraphe 3, énoncé 4 dans la partie où l'on se trouve.

Index.

- \mathcal{O}_n = l'anneau des germes de fonctions holomorphes en $0 \in \mathbb{C}^n$.
- \mathfrak{m} = l'idéal maximal de \mathcal{O}_n .
- \mathcal{M}_n = le corps des germes de fonctions méromorphes à l'origine de \mathbb{C}^n .
- $\hat{\mathcal{O}}_n$ = l'anneau des séries formelles à n indéterminées.
- $\hat{\mathcal{M}}_n$ = le corps des fractions de $\hat{\mathcal{O}}_n$.
- $\mathcal{X}(n)$ = le \mathcal{O}_n module des germes de champs holomorphes à l'origine de \mathbb{C}^n .
- $\hat{\mathcal{X}}(n)$ = le $\hat{\mathcal{O}}_n$ module des champs formels.
- $\Lambda^p(n)$ = le \mathcal{O}_n module des germes de p -formes holomorphes en $0 \in \mathbb{C}^n$.
- $\hat{\Lambda}^p(n)$ = le $\hat{\mathcal{O}}_n$ module des p -formes formelles.
- $E : \hat{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ = l'éclatement de $0 \in \mathbb{C}^n$.
- $\mathbb{P}\mathbb{C}(n)$ = l'espace projectif complexe de dimension n .

Si $\alpha \in \Lambda^p(n)$, on désigne par $S(\alpha)$ (ou $\text{Sing } \alpha$) le germe d'ensemble analytique des zéros de α et par $\mathcal{I}(\alpha)$ l'idéal des composantes de α .

j^l_β signifie le jet d'ordre l en 0 de l'objet β .

Si $i = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice, la longueur de i est $|i| = i_1 + \dots + i_n$.