J. W. Pitman
M. Yor

Quelques identités en loi pour les processus de Bessel

Astérisque, tome 236 (1996), p. 249-276
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__249_0>

Quelques identités en loi pour les processus de Bessel

J. W. Pitman, M. Yor

Résumé. — Nous rassemblons certaines identités en loi concernant les intégrales de R^{-1}, R^2, ainsi que le supremum de R, processus de Bessel de dimension 1, 2 ou 3, puis nous les étendons convenablement à toute dimension. Ces généralisations mettent en jeu certains processus qui "interpolent" entre les ponts et les processus de Bessel. Elles interviennent aussi bien dans des études appliquées, par exemple : calcul de prix d'options, que pour certaines questions d'équations non linéaires.

1. Introduction.

(1.0) Dans toute la suite, $(R_t, t \geq 0)$ désigne un processus de Bessel de dimension $\delta > 0$, issu de 0, et $(r(t), 0 \leq t \leq 1)$ est le pont de Bessel standard, (c'est-à-dire : qui satisfait $r(0) = r(1) = 0$), de dimension δ. Pour la définition précise de ces processus, voir, par exemple, Revuz-Yor [23], chapitre XI.

(1.1) L'objet de ce travail est de démontrer, et de rassembler certaines identités en loi, nouvelles, ou bien un peu éparpillées dans la littérature, concernant les fonctionnelles : $\int_0^1 \frac{ds}{R_s}$, $\int_0^1 ds\, R_s^2$, $\sup_{s \leq 1} R_s$, ainsi que les fonctionnelles correspondantes pour r. Nous avons présenté ces identités, pour les dimensions $\delta = 1, 2, 3$, dans les deux tableaux suivants :

Cette recherche a été réalisée en partie avec l'aide de NSF Grant DMS-9404345.

Dimension δ	Décomposition canonique	Identité en loi
1	$R_t = \beta_t + L_t$	$L_t \underset{\text{p.s.}}{=} \sup_{s \le t}(-\beta_s)$
2	$R_t = \beta_t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s}$	$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s} \overset{(\text{loi})}{=} \sup_{s\le t} \lvert\beta_s\rvert$
3	$R_t = \beta_t + \int_0^t \frac{ds}{R_s}$	$\int_0^t \frac{ds}{R_s} \overset{(\text{loi})}{=} S_t + I_t$

Tableau I

Dimension δ	Décomposition canonique	Identité en loi
1	$r(t) \equiv \lvert b(t)\rvert = \gamma(t) - \int_0^t \frac{ds\, r(s)}{(1-s)} + \ell_t$	$\ell_1 \overset{(\text{loi})}{=} 2S^{(b)}$
2	$r(t) = \gamma(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{r(s)} - \int_0^t \frac{ds\, r(s)}{(1-s)}$	$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{r(s)} \overset{(\text{loi})}{=} \sup_{s\le 1} R_3(s)$
3	$r(t) = \gamma(t) + \int_0^t \frac{ds}{r(s)} - \int_0^t \frac{ds\, r(s)}{(1-s)}$	$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{r(s)} \overset{(\text{loi})}{=} S^{(b)} + I^{(b)} \overset{(\text{loi})}{=} \sup_{s\le 1} r(s)$

Tableau II

(1.2) Voici quelques précisions concernant les *Notations* utilisées dans les deux Tableaux ci-dessus.

Dans le Tableau I, $(\beta_t, t \ge 0)$ désigne un mouvement brownien issu de 0; $S_t = \sup_{s\le t}\beta_s$, $I_t = -\inf_{s\le t}\beta_s$, $L_t = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t ds\, \mathbb{1}_{(R_s\le\varepsilon)}$ $(\delta = 1)$; les deux dernières identités en loi $[\delta = 2, 3]$ ont lieu à t fixé; la première identité est une identité presque sûre entre les deux processus $(L_t, t \ge 0)$ et $\left(\sup_{s\le t} -\beta_s, t \ge 0\right)$.

Dans le Tableau II, $\left(b(t), t \le 1\right)$ désigne un pont brownien standard, $S^{(b)} = \sup_{s\le 1} b(s)$, $I^{(b)} = -\inf_{s\le 1} b(s)$, $\left(\gamma(t), t \ge 0\right)$ désigne un mouvement brownien réel, $\left(R_3(t), t \ge 0\right)$ désigne un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0; enfin, on note :

$$\ell_t = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t ds\, \mathbb{1}_{\left(\lvert b(s)\rvert\le\varepsilon\right)} \qquad (\delta = 1)$$

(1.3) L'organisation de ce travail est la suivante :

– dans le paragraphe 2, nous montrons les identités en loi du Tableau I, et nous les étendons sous des formes convenables à toute dimension δ;

– dans le paragraphe 3, nous faisons de même avec les identités en loi du Tableau II;

– dans le paragraphe 4, on exploite les identités de Ciesielski-Taylor [6] pour obtenir une identité en loi (cf : Théorème 3) dans laquelle l'un des membres est $\sup_{s\leq 1} R(s)$;

– dans le paragraphe 5, nous étudions les lois conjointes de $\left(R_1, \int_0^1 \frac{ds}{R_s}\right)$; en fait, ces résultats sont présentés pour une famille de processus qui "interpolent" entre les processus et les ponts de Bessel, comprenant en particulier les méandres.

(1.4) Les origines et les motivations de ce travail sont variées :

a) tout d'abord, nous résolvons ici une ancienne question posée dans le dernier chapitre de notre article [20], à savoir : expliciter la loi conjointe de $\left(R_t, \int_0^t \frac{ds}{R_s}\right)$, R étant un procesus de Bessel;

b) nous aurions souhaité également donner une présentation plus "transparente" que celle qui figure en [5] des calculs de transformées de Fourier des lois de valeurs principales associées aux temps locaux browniens;

c) nous sommes parvenus, par hasard, à l'identité en loi du Tableau I pour $\delta = 2$, en nous intéressant aux propriétés d'intégrabilité du temps local d'intersection renormalisé $(\gamma_t, t \geq 0)$ pour le mouvement brownien plan;
nous montrons, en appendice, à l'aide des formules de Tanaka-Rosen que pour t fixé, γ_t possède des moments exponentiels. Une démonstration élémentaire (c'est-à-dire, ne s'appuyant pas sur le calcul stochastique) vient d'être donnée indépendamment par J.F. Le Gall [14];

d) enfin, nous sommes heureux de mentionner qu'une partie des identités en loi qui figurent dans ce travail joue un rôle important pour certains calculs exacts de prix d'options (B. Leblanc [13]) ainsi que pour les estimations de solutions fondamentales d'équations non linéaires (Benachour-Roynette-Vallois [1]).

Remerciements : Nous remercions le referee pour ses remarques simplificatrices, et sa lecture soigneuse qui nous a permis de rectifier les valeurs des paramètres qui figurent dans l'énoncé du Théorème 1.

2. Démonstrations et extensions à toute dimension des identités en loi du Tableau I.

(2.1) Comme cela a déjà été dit en **(1.2)**, l'identité pour $\delta = 1$ est une identité presque sûre entre les deux processus indiqués. Cette identité, très classique, est démontrée habituellement grâce au lemme de Skorokhod (voir [23], p. 222–223).

(2.2) Soit maintenant $\delta > 1$. Une première étape dans la démonstration des identités en loi pour $\delta = 2$, et $\delta = 3$ consiste à utiliser l'identité :

$$(2.a)_\delta \qquad \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{R_s} \overset{\text{(loi)}}{=} \left(\int_0^1 ds\, \widehat{R}_s^2\right)^{-\frac{1}{2}} ,$$

où $(R_s, s \geq 0)$, resp : $(\widehat{R}_s, s \geq 0)$ désigne ici un processus de Bessel de dimension δ (> 1), resp : $\widehat{\delta} = 2\delta - 2$, issu de 0.

L'identité en loi $(2.a)_\delta$ figure en ([23], p. 417), où il est montré qu'elle découle de la propriété de scaling :

$$(2.b) \qquad (R_{cs}; s \geq 0) \overset{\text{(loi)}}{=} (\sqrt{c}\, R_s, s \geq 0)$$

de R (et $\widehat{R}$), et de la représentation suivante de R, en fonction (implicite!) de $\widehat{R}$ (voir la Proposition 1.11 de [23]) : R étant donné, il existe un processus de Bessel $\widehat{R}$, de dimension $\widehat{\delta}$ tel que :

$$(2.c) \qquad R_t = \tfrac{1}{4}\, \widehat{R}^2\left(\textstyle\int_0^t \frac{ds}{R_s}\right), \quad t \geq 0 .$$

(2.3) Ces rappels étant faits, nous montrons maintenant la seconde identité en loi du Tableau I : dans le cas $\delta = 2$, l'identité $(2.a)_{\delta=2}$ nous donne, puisque $\widehat{\delta} = \delta = 2$:

$$(2.d) \qquad \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{R_s} \overset{\text{(loi)}}{=} \left(\int_0^1 ds\, R_s^2\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Or, on voit facilement, par identification des transformées de Laplace, ou bien à l'aide du théorème de Ray-Knight pour les temps locaux browniens (cf. paragraphe 4.1 de [29]) que l'on a :

$$(2.e) \qquad \int_0^1 ds\, R_s^2 \overset{\text{(loi)}}{=} T_1 \overset{\text{def}}{=} \inf\{t : |\beta_t| = 1\} .$$

Or, toujours grâce au scaling brownien, on a :

$$(2.f) \qquad T_1 \overset{\text{(loi)}}{=} \left(\sup_{s\leq 1} |\beta_s|\right)^{-2} .$$

Finalement, à l'aide de *(2.d)*, *(2.e)* et *(2.f)*, on obtient l'identité en loi cherchée.

(2.4) Dans le cas $\delta = 3$, on a $\widehat{\delta} = 4$; nous allons utiliser ici des arguments semblables à ceux développés en **(2.3)**, mais en remplaçant maintenant T_1 par $\theta_c \overset{\text{def}}{=} \inf\{t \geq 0 : S_t + I_t \geq c\}$.