Société mathématique de France
Bibliothèque nationale de France

un texte, un mathématicien 2024

Martin Andler

Élise Goujard

Xavier Caruso

Virginie Bonnaillie-Noël

Bienvenue aux auditeurs,
jeunes et moins jeunes, du cycle de conférences
« Un texte, un mathématicien » !

La Bibliothèque nationale de France
est une des plus grandes et plus anciennes
bibliothèques, qui contient des millions d'ouvrages,
dans tous les champs du savoir
y compris les sciences.

La Société mathématique de France
est une des plus anciennes sociétés savantes,
ayant pour but « l'avancement et la propagation des études de mathématiques pures et appliquées ».

Pour la dix-neuvième année, la BnF et la SMF
s'associent pour organiser ces conférences où
de grands chercheurs nous montreront le chemin
qui mène d'un grand texte classique de
mathématiques jusqu'à la recherche contemporaine.

Partageons ensemble leur passion.

Bibliothèque nationale de France
Société mathématique de France

La symétrie dans tout ses états : les travaux révolutionnaires de Sophus Lie

Martin Andler
Mercredi 17 janvier 2024

Nous comprenons tous ce qu'est la symétrie, dont nous avons une expérience concrète quotidienne en nous regardant dans un miroir, ou en observant la nature ou des monuments autour de nous. Partant de là, les mathématiciens ont étendu la notion ordinaire de symétrie en donnant ce nom à toutes les transformations qui conservent une figure ; par exemple, pour une étoile à cinq branches, il y a 10 transformations possibles, qui consistent soit à faire des symétries au sens habituel du terme, soit à les faire tourner sur elles-mêmes. Un des aspects de cette théorie est qu'en effectuant consécutivement deux transformations, on en obtient une troisième. En 1832, dans un contexte différent, le mathématicien Évariste Galois avait donné le nom de groupe à un tel ensemble de transformations. Très progressivement, les idées de Galois furent comprises par les mathématiciens.

En 1888, le mathématicien norvégien Sophus Lie allait procéder à une généralisation radicale de la notion de groupe de symétrie en introduisant une notion de groupe continu de transformations, où il y a non seulement un nombre infini de transformations, mais elles peuvent varier continûment : pensons par exemple à toutes les manières dont un ballon peut tourner sur lui-même. Lie a alors 46 ans. Né en 1842 dans le village de Nordfjordeid où son père était pasteur, il fait ses études supérieures à l'université de Cristiania (aujourd'hui Oslo). Il obtient une bourse qui lui permet de rencontrer certains des meilleurs mathématiciens allemands et français en 1870. A son retour en Norvège, il soutient en 1871 une thèse remarquée, ce qui pousse le parlement de Norvège à créer pour lui une chaire de professeur.

Dans les années qui suivent, il travaille en Norvège et en Allemagne, et commence à élaborer ses idées qui se synthétiseront dans l'ouvrage monumental «Théorie des groupes de transformations», publié en allemand entre 1888 et 1890, et rapidement célébré comme représentant une avancée mathématique fondamentale. Ainsi, dans une série de conférences données en 1893 au congrès international des mathématiciens, le

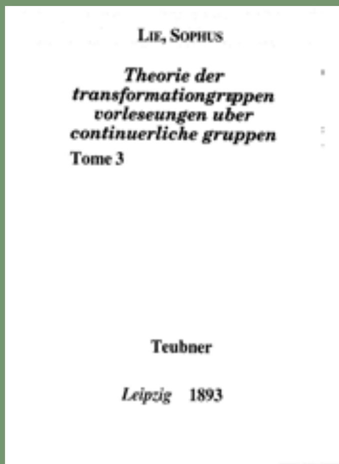
mathématicien allemand parlait du «génie de Sophus Lie».
Il est nommé membre étranger de l'Académie des sciences de Paris en 1892, de la Royal Society de Londres et de la National Academy of Science de Washington en 1895. Il meurt en 1899.
Dès 1893, le mathématicien français Arthur Tresse propose d'appeler «groupes de Lie» les groupes continus qu'avait définis Lie, et c'est sous ce nom qu'ils sont connus encore aujourd'hui. Une idée principale de la théorie de Lie est d'appliquer à ses groupes les idées du calcul infinitésimal, ce qui lui permet d'associer à chaque groupe de Lie ses «générateurs infinitésimaux», ce qu'on appelle aujourd'hui algèbre de Lie.
Si on interroge aujourd'hui un moteur de recherche, l'entrée «Lie group» donne pas moins que 914 000 000 réponses - témoignant ainsi de l'importance de la théorie de Lie, qui a pénétré de très nombreux domaines des mathématiques, de la physique théorique, mais aussi de la robotique ou de la théorie de l'information.
Dans l'exposé, on commencera par expliquer les symétries finies des figures planes et de l'espace, puis on décrira des exemples simples de groupes de Lie, avant de donner une intuition de ce qu'est une algèbre de Lie. Dans la dernière partie de l'exposé, on exposera un certain nombre de contextes dans lesquels les groupes ou les algèbres de Lie jouent un rôle important.

Autour du texte :
Lie-Engel Theorie der transformationsgruppen, 1888-1890.

Martin Andler est professeur émérite de mathématiques à l'université de Versailles St Quentin. Après ses études à l'École normale supérieure et à l'université Paris 7 (maintenant université Paris Cité), il a été chercheur CNRS dans cette même université, puis à l'École normale supérieure avant de rejoindre l'université de Versailles Saint-Quentin. Il a été plusieurs fois professeur invité aux États-Unis, à l'université Rutgers et au Massachusetts Institute of Technology. Ses recherches en mathématiques portent sur les représentations des groupes de Lie. Il effectue également des recherches en histoire des mathématiques, sur le développement des mathématiques en France depuis la fin du XIXème siècle. Par ailleurs, il a consacré beaucoup d'énergie dans des actions de diffusion et promotion des mathématiques, principalement au sein de l'association Animath dont il a été président de 1998 à 2017. Il a été également le premier responsable du cycle Un texte, un mathématicien créé en 2005.

Portrait de Sophus Lie 1842-1899
(Photographie : L. Szacinski 1896, source : wikipedia)

Fac-similé d'un des trois volumes du livre
(Source Gallica)



LIE, SOPHUS

Theorie der transformationgruppen vorleseungen uber continuerliche gruppen

Tome 3

Teubner

Leipzig 1893

Une rosace de l'église de Montfort-en-Chalosse.

Un exemple de symétrie, le château de Versailles

Bibliographie sélective

Biographie

Helgason, Sigurdur (1927-2023)
« Sophus Lie, the Mathematician », *Proceedings of The Sophus Lie Memorial Conference*, Oslo, August, 1992. Oslo, Scandinavian University Press. p. 3–21.

Stubhaug, Arild (1948-)
Sophus Lie : une pensée audacieuse, traduit par Marie-José Beaud et Patricia Chwat, Paris, Berlin, Heidelberg, Springer, 2005, 567 p.

Œuvres

Chevalley, Claude (1909-1984)
Theory of Lie Groups, Princeton Mathematical Series, vol. 8, Princeton University Press, 1946, 232 p. (il en existe d'innombrables, on se limite ici à :) 1er ouvrage d'un point de vue moderne.

Galois, Évariste (1811-1832)
Écrits et mémoires mathématiques, éd. critique intégrale des manuscrits et publications d'Évariste Galois par Robert Bourgne et Jean-Pierre Azra, préf. de Jean Dieudonné, collection Les grands classiques Gauthier-Villars, Paris, Jacques Gabay, 1997, 616 p.

Lie, Sophus (1842-1899), Engel, Friedrich (1861-1941)
Theorie der Transformationsgruppen, 3 vol., Teubner, Leipzig, 1888-1890.

Lie, Sophus (1842-1899), (Author), Merker, Joël (Editor, Translator)
Engel, Friedrich (contributor), *Theory of Transformation Groups I: General Properties of Continuous Transformation Groups. A Contemporary Approach and Translation*, Springer, 2015, 670 p.

Sur les œuvres

Cartan, Élie (1869-1951)
Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Paris, Gauthier-Villars, deuxième édition revue et augmentée, 1951, 64 p.

Fritzsche, Bernd (1983-),
« Sophus Lie, a sketch of his life and work » *Journal of Lie Theory* 9.1., 1999, p. 1-38.

Godement, Roger (1921-2016)
Introduction à la théorie des groupes de Lie, Heidelberg, Springer, 2003, 324 p.

Hawkins, Thomas (1938-)
Emergence of the Theory of Lie Groups - An Essay in the History of Mathematics, 1869-1926, New-York, Springer, 2000, 580 p.

Merker, Joël (1970-)
Le problème de l'espace : Sophus Lie, Friedrich Engel et le problème de Riemann-Helmholtz, Paris : Hermann, 2010, 324 p.
Note : Contient en partie III la traduction française commentée et annotée de : *Theorie der Transformationsgruppen*, dritter und letzter Abschnitt, Abteilung V / Sophus Lie, unter Mitwirkung von Friedrich Engel. - Bibliogr. p. 317-324.

Rowe, David E. (1950-)
« Klein, Lie and the Erlanger Programm » 1830-1930: *A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics*, ed. Boi Luciano, Flament Dominique, and Salanskis Jean-Michel, Heidelberg, Springer, 1992, p. 45-54.

Rowe, David E. (1950-)
« Klein, Lie, and the Geometric Background of the Erlangen Program » in Rowe David E. and McCleary John, eds., *The History of Modern Mathematics: Ideas and their Reception*, vol. 1, Boston, Academic Press, 1989, p. 209-273.

Rowe, David. E. (1950-)
« The Early Geometrical Works of Felix Klein and Sophus Lie », *The History of Modern Mathematics*, vol. 1, ed. McCleary John and Rowe David E., 1989, p. 209-273, Boston, Academic Press.

Tits, Jacques (1930-2021)
« Travaux de Margulis sur les sous-groupes discrets de groupes de Lie », dans Séminaire Bourbaki : vol. 1975-1976, exposés 471-488, *Séminaire Bourbaki*, n. 18, 1977, exposé n. 482, 17 p.

Walusinski, Gilbert (1915-2006) et Taton, René (1915-2004)
Dieudonné Jean (1906-1992), *Présence d'Évariste Galois* : 1811-1832, Paris, Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, 1983, 56 p.

Sur le net

Canal U : Andler, Martin (1951-)
Les groupes de Lie et leurs représentations : de la géométrie et de la physique à la théorie des nombres.
https://www.canal-u.tv/chaines/fmsh/histoires-de-geometries-annee-2009/les-groupes-de-lie-et-leurs-representations-de-la

Durée : 01:42. Réalisation : 27.04.2009.
Mise en ligne : 27.04.2009. Page consultée le 01.11.2023.

O'Connor, John Joseph (1945-)
Robertson, Edmund Frederick (1943-), «Marius Sophus Lie,» http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lie.html
Mise en ligne le 23.01.2009.
Page consultée le 06.11.2023.

Maryam Mirzakhani et la géométrie des surfaces

Élise Goujard

Mercredi 07 février 2024

En 2014, Maryam Mirzakhani est la première femme à recevoir la médaille Fields, l'équivalent du prix Nobel pour les mathématiques, « pour ses contributions exceptionnelles à la dynamique et la géométrie des surfaces de Riemann et de leurs espaces de modules ». Nous nous intéresserons ici à l'un de ses premiers travaux de thèse, qui concerne la géométrie de certaines surfaces dites hyperboliques, et plus précisément la géométrie de certaines courbes bien particulières sur ces surfaces. Ces résultats datent de seulement 15 ans et ont déjà plusieurs applications remarquables.

Dans le plan euclidien familier, le plus court chemin pour aller d'un point à un autre est de suivre une ligne droite, en fait l'unique droite passant par ces deux points. Sur la sphère (on peut penser à la surface de la Terre), le plus court chemin pour relier deux points est de suivre un grand cercle, c'est-à-dire un cercle dont le centre est situé au centre de la Terre, comme l'équateur ou les méridiens. Les parallèles ne sont pas des grands cercles, ainsi pour relier Madrid à New York, situés à la même latitude, il ne vaut mieux pas suivre le parallèle ! La notion de plus court chemin se généralise ainsi en ce qu'on appelle une courbe « géodésique ». Les géodésiques du plan sont les droites, et celles de la sphère sont les grands cercles. On observe déjà que selon les géométries le comportement des géodésiques est différent : par exemple en géométrie sphérique deux géodésiques s'intersectent forcément, contrairement au cas euclidien.

Il existe cependant un autre type de géométrie appelée « hyperbolique » pour laquelle les géodésiques se comportent encore différemment. Cette géométrie apparait quand on étudie des surfaces avec plusieurs anses, comme par exemple la bouée à deux places représentée sur la figure 2. Sur ce type de surface, les géodésiques peuvent s'intersecter elles-mêmes. Dans sa thèse, Maryam Mirzakhani s'est intéressée aux géodésiques « simples », c'est-à-dire celles qui ne s'auto-intersectent pas. On peut trouver de telles courbes aussi longues que l'on veut sur la surface (voir figure 3). Mirzakhani a estimé le nombre de telles

courbes, quand leur longueur grandit. Ce résultat permet par exemple de prédire, quand on prend une telle géodésique au hasard assez longue, si elle va couper la surface en deux ou non. La preuve de ce théorème utilise des outils puissants qu'elle a développés spécialement, en particulier une intégration sur l'ensemble de toutes les surfaces hyperboliques de type fixé, qu'on appelle espace de modules. La beauté des mathématiques de Mirzakhani réside pour moi dans ce constant aller-retour entre la géométrie des objets concrets, tangibles et facilement visualisables comme les surfaces, et la géométrie des espaces de grande dimension bien plus abstraits et difficiles à appréhender que sont les espaces de modules, qui décrivent l'ensemble des déformations de ces surfaces.

Un autre de ses résultats concerne certaines identités remarquables sur les longueurs de ces courbes géodésiques. En géométrie euclidienne on peut trouver de tels exemples d'identités remarquables, comme par exemple le théorème de Viviani pour les triangles équilatéraux. En géométrie hyperbolique, Grégory McShane a démontré en 1991 une telle identité pour un type de surface bien particulier. Mirzakhani a montré en 2007 que quel que soit le type de la surface hyperbolique, il existe toujours une identité remarquable sur les longueurs de ses géodésiques, une sorte de relation presque magique qui existe entre toutes ces courbes. Ce théorème lui a permis d'obtenir des résultats impressionnants sur les espaces de modules correspondants.

Autour du texte :

Mirzakhani, Maryam, «Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces», Ann. of Math. (2)168(2008), no.1, 97–125.

Élise Goujard est maîtresse de conférences à l'université de Bordeaux, après un doctorat à l'université de Rennes soutenu en 2014. Elle s'intéresse à la géométrie et en particulier aux surfaces plates et à leurs espaces de modules, qui paramètrent l'ensemble des déformations possibles de ces surfaces. Elle étudie plus précisément certains problèmes de comptage dans ce contexte, comme l'estimation du nombre de points entiers dans ces espaces de modules ou celle du nombre de trajectoires périodiques dans les surfaces individuelles. Toutes ces estimations permettent par exemple d'obtenir des informations quantitatives sur la dynamique dans les billards polygonaux. Ces thématiques de recherche mêlent géométrie, combinatoire et dynamique. Depuis 2022 elle est membre junior de l'Institut Universitaire de France et elle a reçu en 2023 la médaille de bronze du CNRS.

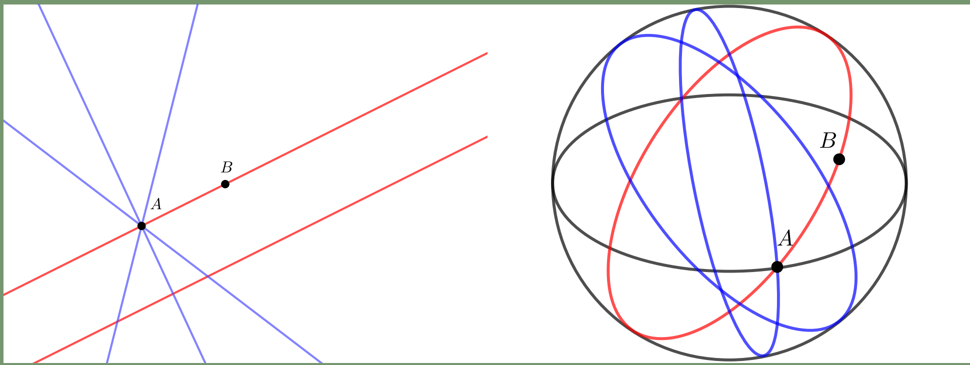


Figure 1 : des géodésiques dans le plan euclidien (à gauche), et sur la sphère (à droite)

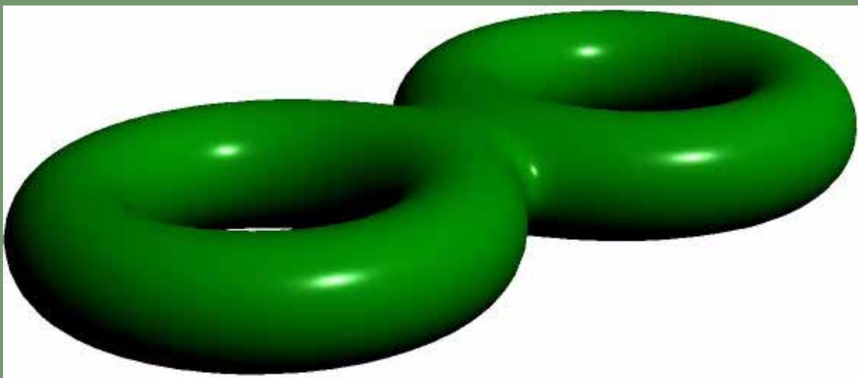


Figure 2 : une surface de genre deux (bouée à deux places)

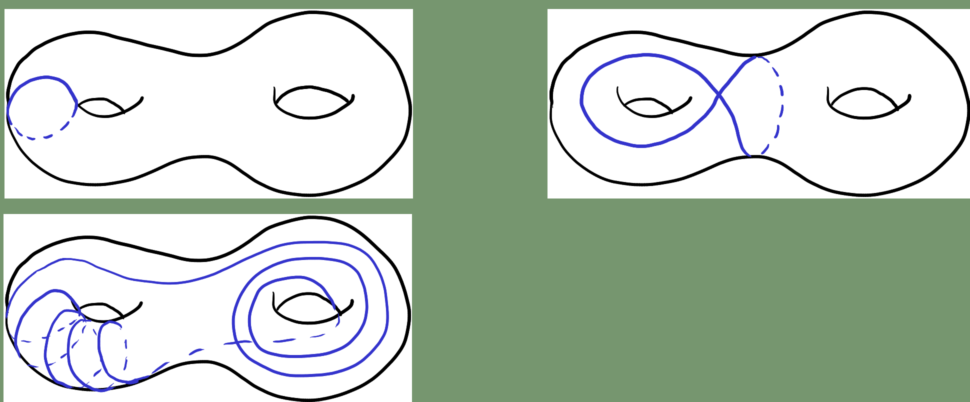


Figure 3 : une géodésique simple (en haut à gauche), non simple (en haut à droite) et une géodésique simple plus longue (en bas)

Bibliographie sélective

Biographie

Escofier Jean-Pierre
Petite histoire des mathématiques, Dunod, 2018, 288 p.

Erica Klarreich
« Maryam Mirzakhani, 2014 Fields medal and Nevanlinna Prize. A Tenacious Explorer of Abstract Surfaces », *Quantamagazine*, 12.08.2014.

Ghys, Étienne (1954-)
« Maryam Mirzakhani, médaille Fields 2014 », *Images des Mathématiques*, CNRS, 13.08.2014.

« Interview with Research Fellow Maryam Mirzakhani », *Claymath*, 2008, p. 11-13.

Zorich, Anton (1962-)
« Le théorème de la baguette magique de A. Eskin et M. Mirzakhani », *La Gazette des mathématiciens*, n. 142, octobre 2014, p. 39-54.

Œuvres

De Pergamo, Apolonio, Viviani, Vincenzo (1622-1703)
De maximis et minimis geometrica…, 1659, Appendice, 146.

Eskin, Alex (1965-)
Mirzakhani, Maryam (1977-2017), Mohammadi, Amir, *Effective counting of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces*, [Submitted on 11 May 2019 (v1), last revised 5 Jul 2021 (this version, v2)], 50 p.

Eskin, Alex (1965-)
Mirzakhani, Maryam (1977-2017), Mohammad Amir, « Isolation, equidistribution, and orbit closures for the SL2(R) action on moduli space », *Annals of Mathematics*, March 2015, p. 673-721.

Euler, Leonhard (1707-1783)
« De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente », *Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, vol. 3, 1732, p. 110–124.

Laplace, Pierre-Simon (1749-1827)
Traité de mécanique céleste, t. 2, Paris, 1799; *Œuvres complètes*, t. 2, Paris, Gauthier-Villars, 1878.

Mirzakhani, Maryam (1977-2017)
« Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces », *Inventiones mathematicae*, vol. 167, 1, Springer, 2007, p. 179-222.

Mirzakhani, Maryam (1977-2017)
« Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces », *Ann. of Math*., 2, 168, 2008, p. 97–125.

Eskin, Alex (1965-)
Mirzakhani, Maryam (1977-2017), *Invariant and stationary measures for the SL2(R) action on moduli space*, Publications mathématiques de l'IHÉS, New-York, Springer, 2018, 214 p.

Mirzakhani, Maryam (1977-2017)
« Ergodic Theory of the Earthquake Flow », *International Mathematics Research Notices*, vol. 2008, 39 p.

Mirzakhani, Maryam (1977-2017)
« Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli spaces of curves », *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 20, n. 1, January 2007, p. 1-23

Huber, Heinz (1926-2000)
« Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen », Math. Ann. 138, 1959, p. 1–26.

Sur les œuvres

Goujard, Elise
Siegel Veech Constants for Strata of Moduli Spaces of Quadratic Differentials, Geom. Funct. Anal. 25, 2015, p. 1440–1492.

Delecroix, Vincent (1984-), Goujard, Elise, Zograf, Peter, Zorich, Anton (1962-)
« Masur-Veech volumes, frequencies of simple closed geodesics and intersection numbers of moduli spaces of curves », working paper submitted on 22 Aug 2019, 86 p.

Lobatchevski, Nikolaï Ivanovitch (1792-1856)
« Géométrie imaginaire », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, n. 17, 1837, p. 295-320.

McShane, Greg
« Simple geodesics and a series constant over Teichmüller space », Invent. Math. 132, 1998, p. 607–632.

Sur le net

Goujard, Elise
La baguette magique d'Eskin-Mirzakhani, conférence “Le 5 minutes Lebesque”, 15.10.2019.

Zorich, Anton (1962-)
Le théorème de la baguette magique, colloque à l'Université Paris Nord, 1H22, 2015.

Les idéaux d'Emmy Noether

Xavier Caruso
Mercredi 20 mars 2024

À l'aube du XXème siècle, les mathématiques connaissent d'importantes percées dans plusieurs domaines :
(1) en arithmétique, Richard Dedekind et Ernst Kummer introduisent les notions d'entiers algébriques et de nombres idéaux et les mettent à profit pour démontrer de nombreux nouveaux cas du grand théorème de Fermat,
(2) en géométrie, Félix Klein place au coeur de la discipline les transformations et les propriétés d'invariance, unifiant ainsi les géométries euclidiennes et non-euclidiennes,
(3) en topologie, Henri Poincaré développe l'*Analysis Situs* qui apporte des outils extrêmement puissants pour décrire de manière fine la forme des objets mathématiques.
(4) l'algèbre, enfin, se renouvelle complètement en centrant son intérêt sur l'étude abstraite des opérations, promettant de fournir un langage unifié aux mathématiques.

David Hilbert, souvent considéré comme le plus grand mathématicien de cette génération, participe lui aussi de manière active à toutes ces avancées. En 1900, il propose une liste de 23 problèmes qui motivera les recherches futures pendant tout le XXème siècle.

C'est dans ce contexte en pleine effervescence qu'évolue la mathématicienne Emmy Noether. Son goût pour l'abstraction porte naturellement sa passion vers l'algèbre. Mieux que quiconque, elle comprend très rapidement que l'intérêt de l'algèbre va bien au delà du langage, et que les constructions algébriques fournissent aussi des outils d'une généralité et d'une puissance déconcertante pour aborder, reformuler, établir des liens, comprendre en profondeur et finalement résoudre tous les défis mathématiques de son époque.

Les travaux d'Emmy Noether se concentrent particulièrement sur la théorie des anneaux, qui étudie les ensembles sur lesquels on peut effectuer les trois opérations fondamentales des mathématiques : addition, soustraction et multiplication. Bien entendu, il peut s'agir d'ensembles de nombres (comme en arithmétique) mais aussi d'ensembles de fonctions ou d'objets mathématiques plus compliqués encore.

Dans l'un de ses travaux fondateurs, Emmy Noether étend de manière spectaculaire le principe de récurrence dans le cadre général de la théorie des anneaux. Elle introduit, pour ce faire, la « condition de chaîne croissante », que l'on appelle aujourd'hui « condition de noethérianité ». Comme application, Emmy Noether établit un théorème général de factorisation qui a des conséquences dans toutes les branches des mathématiques. En arithmétique, il permet de retrouver les théorèmes de factorisation des nombres idéaux de Dedekind et Kummer. En géométrie, il est la clé permettant de décomposer des espaces géométriques complexes comme union d'espaces plus simples (e.g. droites, cercles, etc.) dits irréductibles et donne un nouveau regard sur la question subtile des multiplicités d'intersection.

Par sa généralité, sa profondeur, sa justesse et sa pertinence, l'œuvre d'Emmy Noether est aujourd'hui considérée comme l'une des œuvres majeures des mathématiques du début du XXème siècle. Elle a été l'une des bases essentielles du développement fulgurant de la géométrie algébrique et de la théorie de nombres dans la deuxième moitié du XXème siècle. Aujourd'hui encore, les idées de Noether sont sous-jacentes à de nombreux travaux en algèbre et géométrie et demeurent extrêmement fécondes.

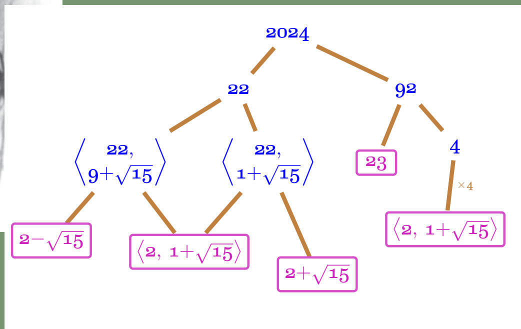
Autour du texte :
Idealtheorie in Ringbereichen» publié à Math. Ann. (volume 83, pages 24-66, 1921).

Xavier Caruso est directeur de recherche au CNRS, à l'université de Bordeaux. Après une thèse en mathématiques fondamentales en géométrie arithmétique, il s'oriente progressivement vers l'informatique, se donnant pour objectif de développer des logiciels de calcul symbolique pour l'algèbre, la théorie des nombres et leurs applications.

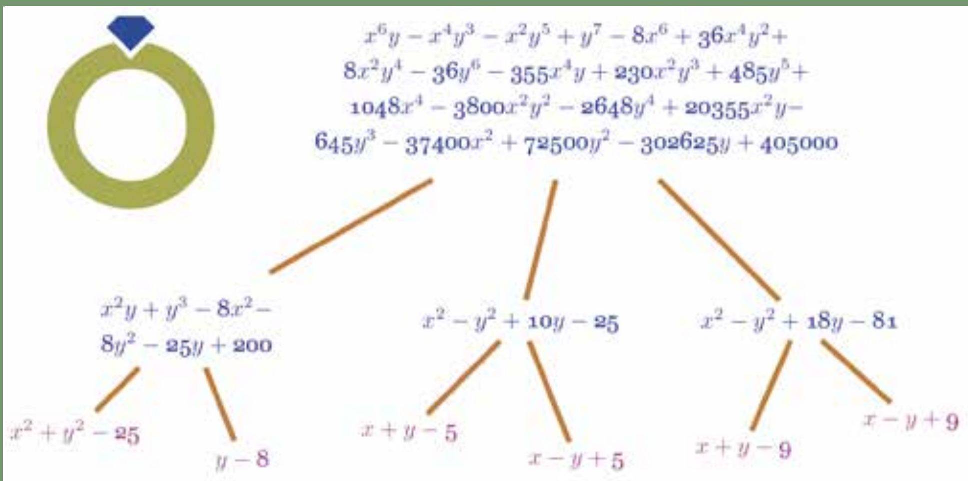
Convaincu que chaque personne est capable de s'émerveiller des mathématiques, qu'il s'agisse de constructions abstraites subtiles ou d'un simple jeu, Xavier Caruso aime partager son enthousiasme pour la discipline devant toute sorte de public. Il est, en particulier, à l'initiative du séminaire « Mathematic Park » à l'Institut Henri Poincaré et de la série « Les 5 minutes Lebesgue » sur YouTube.

Portrait d'Emmy Noether vers 1900
(source : wikipedia)

Factorisation dans l'anneau Z[√15]



Factorisation d'un polynôme à deux variables



Bibliographie sélective

Biographie

Benzoni, Sylvie (1967-), Fermanian Kammerer, Clotilde (1967-), Kosmann-Schwarzbach Yvette (1941-), Rojas-Molina, Constanza (1983-), Rowe, David E. (1950-)
Emmy Noether, mathématicienne d'exception, collection Maison Poincaré [regards mathématiques], Société Mathématique de France, t.3, 2023, 32 p.

Brewer, James W. (1968-), Smith, Martha K. (1944-), et al.,
Emmy Noether: A Tribute to Her Life and Work, Marcel Dekker Inc, 1981, New York, 208 p.

Dick, Auguste (1910-1993)
« Emmy Noether: 1882–1935 », *Elemente der Math. Beiheft*, n. 13, Birkhäuser Verlag, Basel, 1970, 72 p.

Dubreil, Paul (1904-1994)
« Emmy Noether », *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, t. 7, 1986, p. 15-27.

Dubreil-Jacotin, Marie-Louise (1905-1972)
« Figures de mathématiciennes. Les Grands Courants de la Pensée mathématique », présentés par François Le Lionnais, *Cahiers du Sud*, 1948, p. 266-269.

Œuvres

Noether, Emmy (1882-1935)
« Idealtheorie in Ringbereichen », *Math. Ann.*, vol. 83, n. 1, 1921, p. 24-66. Traduction anglaise par Daniel Berlyne: I*deal Theory in Rings*, Working Paper submitted on 11 Jan 2014, 51 p.

Sur les œuvres

Berenstein, Carlos A. (1944-2019) and Gay, Roger
Complex Variables: An Introduction, Springer, New-York, 1991, 652 p.

Chevalley Claude (1909-1984)
« On the Theory of Local Rings », *Ann. of Math.*, n. 44, 1943, p. 690–708.

Hilton, Peter (1923-2010)
« A Brief, Subjective History of Homology and Homotopy Theory in This Century », *Mathematics Magazine*, vol. 61, n. 5, 1988, p. 282-291.

Conrad, Keith
« Noetherian modules », working paper, University of Connecticut, 10 p.

Kosmann-Schwarzbach, Yvette (1941-)
Les théorèmes de Noether, invariance et lois de conservation au XXème siècle, Les éditions de l'École Polytechnique, 2004, 202 p.

Lang, Serge (1927-2005)
Algebra, Graduate Texts in Mathematics 211, Springer, New-York, 2002, 934 p.

Rowe, David E. (1950-)
« The Göttingen response to general relativity and Emmy Noether's theorems », *The Symbolic Universe. Geometry and Physics*, 1890-1930, J. Gray (éd.), Oxford University Press, 1999, p. 189-233.

Rowe, David E. (1950-)
« Emmy Noether, centenaire d'un théorème », *Pour la Science*, n. 490, août 2018, p. 24-25.

Rowe, David E. (1950-)
Koreuber, Mechthild, *Proving It Her Way. Emmy Noether, a Life in Mathematics*, New-York, Springer, 2020, 240 p.

Tent, Margaret B.W. (1944-)
Emmy Noether: The Mother of Modern Algebra, A. K. Peters, New-York, 2008, 184 p.

Sur le net

Page personnelle de Xavier Caruso: https://xavier.caruso.ovh/

Page personnelle de Keith Conrad : https://kconrad.math.uconn.edu/

Peut-on entendre la forme d'un tambour ? D'après Mark Kac

Virginie Bonnaillie-Noël

Mercredi 03 avril 2024

Fixez une plaque à un support, saupoudrez-la de sable, puis frottez un archet verticalement sur le bord de la plaque. Le sable se déplacera alors des zones de forte vibration vers celles où elles sont moins fortes, formant des figures dites de Chladni.

Ce phénomène a été observé par Galilée en 1638. C'est Ernst Chladni, grâce à la publication en 1787 du traité *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*, qui permet de diffuser ce phénomène. Les figures observées portent désormais son nom. Elles permettent de « voir un son ». Napoléon, impressionné devant un tel phénomène, promit un prix à celui qui pourrait expliquer comment se forment ces figures. Le prix fut remporté par Sophie Germain.

L'apparition des lignes dessinées sur la plaque est liée au son qu'elle produit lorsqu'on la fait vibrer.

Lorsqu'un objet (corde, membrane, plaque, diapason) vibre, sa forme lui impose certains types de mouvements périodiques... Ces vibrations peuvent se décomposer en certaines vibrations périodiques élémentaires. Ces vibrations élémentaires se produisent à des fréquences (nombre de périodes par seconde) bien précises. On les appelle modes propres et fréquences propres.

Regardons l'exemple d'une corde élastique tendue et fixée à chacune de ses extrémités. Ca peut être le cas d'une guitare ou d'un piano par exemple. Lorsqu'on tape la corde, elle se met à vibrer à une fréquence déterminée. Elle pourrait vibrer indéfiniment s'il n'y avait pas de déperdition d'énergie. Ce mouvement peut être décomposé en une collection de mouvements simples, les modes propres auxquels correspondent des fréquences propres. Ces modes propres sont des sinusoïdes (voir figure).

Si on envoie une vibration sur l'objet à sa fréquence de vibration se produit alors un phénomène d'amplification. C'est ce qui s'est passé en 1831 sur le pont de Broughton, l'un des premiers ponts suspendus en Europe : alors que la troupe marchait au pas cadencé sur le pont, il se produisit un phénomène de résonance mécanique qui provoqua la ruine du pont. Désormais, les militaires rompent la cadence lorsqu'ils franchissent un pont. Ces exemples montrent qu'à chaque forme correspond des modes et fréquences propres. En 1966, Kac se pose la ques-

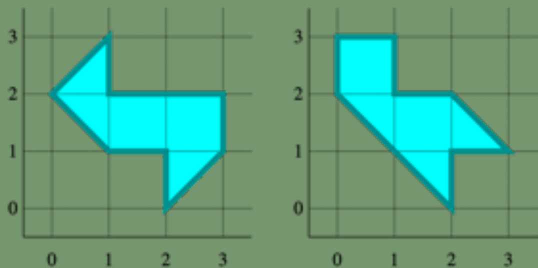
tion du « problème inverse » dans l'article intitulé « Peut-on entendre la forme d'un tambour ?». Dans cet article, Mark Kac formule la question suivante : si vous entendez quelqu'un jouer du tambour, et à supposer que vous connaissez les fréquences correspondant aux sons perçus, serez-vous capable de déterminer la forme exacte de l'instrument qui a servi à les produire ? Ou, au contraire, existe-t-il plus d'un tambour capable de donner les sons en question ? Milnor répond presque immédiatement à la question en exhibant un contre-exemple avec une paire de tores à 16 dimensions ayant le même spectre mais des formes différentes. Il faut attendre 1992 pour obtenir la réponse en dimension 2 : C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert ont montré que la liste des fréquences propres n'est pas caractéristique du tambour. Les deux tambours de forme décrites sur la figure de la page suivante ont les mêmes fréquences propres, la même aire mais ne sont pas identiques. En cinquante ans, la question posée par Kac est devenue extrêmement classique et source de nombreux travaux. En particulier, il s'agit soit de comprendre si la réponse peut être positive sous des contraintes supplémentaires ou si la réponse est la même pour d'autres modèles.

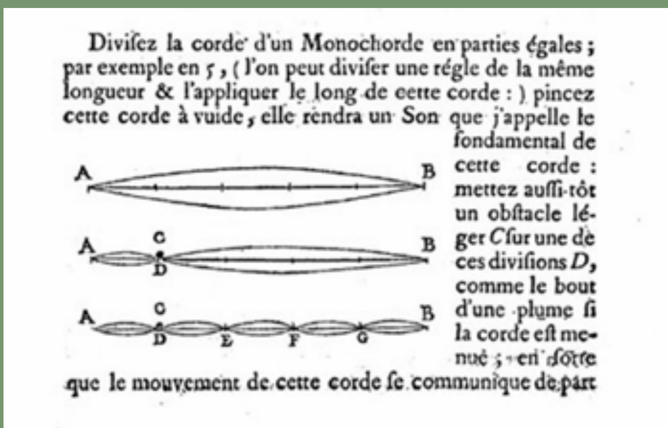
Autour du texte :

Kac, Mark Can one hear the shape of a drum? Amer. Math. Monthly 73 (1966), no. 4, part II, 1-23

Virginie Bonnaillie-Noël, ancienne élève de l'École normale supérieure de Cachan, agrégée de mathématiques en 2000 et docteure en mathématiques en 2003 de l'université Paris-Sud 11, elle entre au CNRS en 2004 en tant que chargée de recherche à l'Institut de recherche Mathématique de Rennes. Spécialiste des équations aux dérives partielles, de la théorie spectrale et des analyses asymptotiques et numériques, elle est lauréate, en 2008, de la médaille de bronze du CNRS et en 2009 du prix Irène Joliot-Curie « Jeune femme scientifique ». En 2014, elle devient directrice de recherche au Département de mathématiques et applications (ENS-PSL et CNRS) et est nommée directrice adjointe scientifique de l'Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions (INSMI) du CNRS. Depuis 2018, elle est directrice de direction d'appui aux partenariats publics du CNRS.

Le second pont suspendu de Broughton (reconstruit en 1883).





Diviſez la corde d'un Monochorde en parties égales ; par exemple en 5, (l'on peut diviſer une régle de la même longueur & l'appliquer le long de cette corde :) pincez cette corde à vuide, elle rendra un Son que j'appelle le fondamental de cette corde : mettez auſſi-tôt un obſtacle léger C ſur une de ces diviſions D, comme le bout d'une plume ſi la corde eſt menuë ; en ſorte que le mouvement de cette corde ſe communique de part

Le système général de Sauveur dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1701)

Bibliographie sélective

Œuvres

Kac, Mark (1914-1984)
« Can one hear the shape of e drum ? », American Mathematical Monthly, 73, 1966, n. 4, part II, p. 1-23. https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/m207b/kac.pdf

Kac, Mark (1914-1984), Ulam, Stanislaw Marcin (1909-1984)
Mathematics and logic, retrospect and prospects. New-York, Washington, London, F.A. Praeger, 1968, 170 p.

Kac, Mark (1914-1984) , Ulam, Stanislaw Marcin (1909-1984)
Mathématiques et logique : rétrospective et perspectives, traduit par Philippe Gatbois, Paris, Dunod, 1973, 178 p.

Kac, Mark (1914-1984), Rota, Gian-Carlo (1932-1999) , Schwartz, Jacob T. (1930-2009)
Discrete thoughts : essays on mathematics, science, and philosophy, Boston, Birkhäuser, 1986, 264 p.

Kac, Marc (1914-1984)
Enigmas of chance. An autobiography. Alfred P. Sloan Foundation, New-York : Harper & Row, 1985, 163 p.

Sur les œuvres

Giraud, Olivier, Thas, Koen
« Hearing shapes of drums : mathematical and physical aspects of isospectrality », Review of Modern Physics, 82, (3), 2010, p. 2213-2255.

Gordon, Carolyn, Webb, David
« You Can't Hear the Shape of a Drum », American Scientist, vol. 84, n. 1, (January-February 1996), p. 46-55.

Pleijel, Ake
« A study of certain Green's functions with applications in the theory of vibrating membranes », Arkiv för Matematik, 2, 1954, p. 553-569.

Pleijel, Ake
« Remarks on Courant's nodal line theorem », Communications on Pure Applied Mathematics, vol. 9, 1956, p. 543–550.

Pólya, George
« On the eigenvalues of vibrating membranes », proceedings of the London Mathematical Society, (3), 11, 1961, p. 419–433.

Protter, Muray Harold
« Can one hear the shape of a drum ? Revisited », Society for Industrial Applied Mathematics, vol. 29, n. 2, june 1987, p. 185-197.

Stewart, Ian
« Écoutez la forme du tambour », Mon cabinet de curiosités mathématiques, 2009, Paris, Flammarion, p. 198–201.

Stöckmann, H.J.
« Chladni meets Napoleon », European Physical Journal of Special Topics, n. 145, p. 15–23, 2007.

Vignéras, Marie-France
« Variétés riemanniennes iso-spectrales et non isométriques », Annals of Mathematics, Princeton University Press, n. 112, p. 21-32, 1980.

Weyl, Hermann
« Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte », Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften Zu Göttingen, 1911, p. 110–117.

Sur le web

Siltanen, Samuli
Can one hear the shape of a drum? Page consultée le 07.12.2022.
Voir : https://www.youtube.com/watch?v=SIOLRcU7FZo

Cantat, Serge, Hillairet, Luc
« Les figures sonores de Chladni », dans Images des Mathématiques, Juillet 2012, page consultée le 12.12.2022. Voir : https://images.math.cnrs.fr/Les-figures-sonores-de-Chladni

animath.fr

Institut Henri Poincaré
11 rue P. et M. Curie
75231 Paris Cedex 05

smf.emath.fr

Institut Henri Poincaré
11 rue P. et M. Curie
75231 Paris Cedex 05

Bibliothèque nationale de France
Quai François-Mauriac 75013 Paris
http://www.bnf.fr

un texte, un mathématicien

L'école mathématique française brille de tous ses feux.

Dans ce cycle de conférences, certains des meilleurs mathématiciens présentent un aspect de leurs travaux.

Le conférencier choisit un texte mathématique classique qui l'a particulièrement influencé. À partir de ce texte, de son auteur et de son histoire, il montre comment des problématiques anciennes débouchent sur des recherches actuelles.

Quatre mercredis dans l'année à 18h30. Ce cycle est organisé par un comité animé par Marie-Claude Arnaud (Université Paris Cité).

Comité scientifique :

Marie-Claude Arnaud
Cyril Demarche
Agnès Desolneux
Pierre-Antoine Guihéneuf
Patrick Massot
Gilles Pagès
Guillaume Saës
Pierre-Alain Sallard

Grand auditorium
Bibliothèque nationale de France
Site François-Mitterrand, 75013 Paris