MÉMOIRES DE LA S. M. F.

S. OCHANINE

**Signature modulo 16, invariants de Kervaire généralisés
et nombres caractéristiques dans la K -théorie réelle**

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 5 (1981)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1981_2_5__1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES RAPPELS ET CONVENTIONS

Toutes les variétés considérées seront lisses de classe C^∞ . Pour une telle variété X , bX désigne le bord de X . "Variété close" signifie "variété compacte sans bord". On note $T_x X$ l'espace tangent de X au point $x \in X$, et TX le fibré tangent de X .

Soit X une variété et $Y \subset X$ une sous-variété. Cela signifie en particulier que $bX \cap Y = bY$ et que $\bar{Y}$ coupe transversalement bX , c'est-à-dire que, pour tout $y \in bY$, $T_y Y$ et $T_y bX$ sont en position générale dans $T_y X$. Le fibré normal ζ de Y dans X est, par définition, égal au fibré quotient $(TX|_Y)/TY$. La condition de transversalité ci-dessus implique que l'on peut identifier $\zeta|_{bY}$ et le fibré normal de bY dans bX .

Soit maintenant $f: Z \rightarrow X$ une application lisse telle que $f^{-1}(bX) = bZ$. On dira que f est transverse à Y , si

(i) Pour tout $y \in Y \cap f(Z)$ et pour tout $z \in Z$ tel que $f(z) = y$, $df_z(T_z Z)$ et $T_y Y$ sont en position générale dans $T_y X$ (en particulier, $Y \cap f(Z) = \emptyset$ si $\dim Z + \dim Y < \dim X$);

(ii) Pour tout $z \in bZ$, $df_z(T_z Z)$ et $T_y(bX)$ sont en position générale dans $T_y X$, où $y = f(z)$.

Si $f: Z \rightarrow X$ est transverse à $Y \subset X$, $V = f^{-1}(Y)$ est une sous-variété de Z et $df: TZ \rightarrow TX$ induit un morphisme $\zeta_1 \rightarrow \zeta_2$ des fibrés normaux respectivement de V dans Z et de Y dans X , bijectif sur chaque fibre.

§ 1 - STRUCTURES SPINORIELLES

Nous rappellerons ici quelques faits relatifs aux groupes Spin_n et $\text{Spin}_n^{\mathbb{C}}$ et aux structures correspondantes dans les fibrés vectoriels. Pour plus de détails, le lecteur peut se rapporter aux articles de Milnor [34] et de Atiyah, Bott et Shapiro [5].

1.1. Le groupe spinoriel réel Spin_n peut être défini pour $n \geq 2$ comme étant le revêtement double non-trivial du groupe de rotations SO_n . On notera p la projection $\text{Spin}_n \rightarrow \text{SO}_n$ et $p_* : B\text{Spin}_n \rightarrow B\text{SO}_n$ l'application des espaces classifiants induite par p . L'application p_* a pour fibre homotopique F l'espace $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$.

Si ξ est un SO_n -fibré vectoriel, une Spin-structure dans ξ est une réduction du groupe structural de ξ relative à p . Deux Spin-structures dans ξ sont équivalentes, si les réductions correspondantes du groupe structural sont homotopes. Lorsque la base B de ξ est un CW-complexe et $f : B \rightarrow B\text{SO}_n$ une application classifiante de ξ , les classes d'équivalence des Spin-structures dans ξ correspondent bijectivement aux classes d'homotopie verticale d'applications $g : B \rightarrow B\text{Spin}_n$ telles que $p_* \circ g = f$. Le fibré ξ admet une Spin-structure si et seulement si la classe de Stiefel-Whitney $w_2(\xi)$ est nulle. Dans ce cas, il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence des Spin-structures dans ξ et le groupe $[B, F] = H^1(B; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

1.2. Le groupe spinoriel complexe $\text{Spin}_n^{\mathbb{C}}$ s'identifie avec l'image réciproque du sous-groupe $\text{SO}_n \times \text{SO}_2 \subset \text{SO}_{n+2}$ par la projection $p : \text{Spin}_{n+2} \rightarrow \text{SO}_{n+2}$. On définit la notion de Spin^C-structure dans un SO_n -fibré vectoriel comme

précédemment à l'aide de la projection composée q :

$$\text{Spin}_n^{\mathbb{C}} \xrightarrow{p} \text{SO}_n \times \text{SO}_2 \xrightarrow{\text{pr}_1} \text{SO}_n .$$

Par ailleurs, la projection composée d :

$$\text{Spin}_n^{\mathbb{C}} \xrightarrow{p} \text{SO}_n \times \text{SO}_2 \xrightarrow{\text{pr}_2} \text{SO}_2$$

permet d'associer à chaque $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -fibré vectoriel ξ un SO_2 -fibré vectoriel $\det \xi$ tel que la classe d'Euler $e(\det \xi)$ réduite modulo 2 coïncide avec $w_2(\xi)$. Inversement, on vérifie que, si ξ est un SO_n -fibré vectoriel et si x est une classe de $H^2(B; \mathbb{Z})$ dont la réduction modulo 2 coïncide avec $w_2(\xi)$, il existe (au moins) une $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -structure dans ξ telle que $e(\det \xi) = x$.

L'homomorphisme diagonal $\text{SO}_2 \rightarrow \text{SO}_2 \times \text{SO}_2 \subset \text{SO}_4$ représente l'élément nul de $\pi_1(\text{SO}_4) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et donc se relève d'une manière unique en un homomorphisme $\text{SO}_2 \rightarrow \text{Spin}_2^{\mathbb{C}}$. Il s'ensuit que tout SO_2 -fibré vectoriel ξ possède une $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -structure canonique telle que $\det \xi = \xi$.

Il existe un unique homomorphisme φ :

$$\text{Spin}_n^{\mathbb{C}} \times \text{Spin}_m^{\mathbb{C}} \longrightarrow \text{Spin}_{n+m}^{\mathbb{C}}$$

compatible par q avec l'homomorphisme standard

$$\text{SO}_n \times \text{SO}_m \longrightarrow \text{SO}_{n+m}$$

et compatible par d avec la multiplication

$$\text{SO}_2 \times \text{SO}_2 \rightarrow \text{SO}_2 . \quad (*)$$

φ permet de munir la somme de Whitney de deux $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -fibrés vectoriels ξ_1 et ξ_2 d'une $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -structure telle que $\det(\xi_1 \oplus \xi_2)$ s'identifie avec $\det \xi_1 \otimes_{\mathbb{C}} \det \xi_2$, où $\det \xi_1$ et $\det \xi_2$ sont considérés comme fibrés complexes linéaires ($\text{SO}_2 = \text{U}_1$).

(*) On construit aisément φ en utilisant la définition de $\text{Spin}_n^{\mathbb{C}}$ à partir des algèbres de Clifford (cf. [5]).

1.3. Comme il résulte de la définition de $\text{Spin}_n^{\mathbb{C}}$, il existe une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \text{Spin}_n \xrightarrow{i} \text{Spin}_n^{\mathbb{C}} \xrightarrow{d} \text{SO}_2 \longrightarrow 1 .$$

Donc chaque section non-nulle de $\det \xi$ détermine une Spin-structure dans ξ , compatible (par i) avec la $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -structure donnée.

1.4. On appelle Spin-(Spin^C-) variété une variété orientée M dont le fibré tangent stable (c'est-à-dire le fibré $\tau M = TM \oplus \theta^N$, où θ^N est le fibré trivial de dimension N suffisamment grande) est muni d'une Spin-(Spin^C-) structure. On note Ω_*^{Spin} et $\Omega_*^{\text{Spin}^{\mathbb{C}}}$ les anneaux de cobordisme correspondant à ces structures.

Remarque: Deux Spin-(Spin^C-) structures équivalentes sur la même variété close orientée définissent le même élément de Ω_*^{Spin} ($\Omega_*^{\text{Spin}^{\mathbb{C}}}$).

Remarque: Soit M^n une Spin^C-variété. Comme $\det(\xi \oplus \theta^N) = \det \xi \otimes_{\mathbb{C}} \det \theta^N = \det \xi$, le fibré $\det \tau M^n$ est bien défini.

Remarque: Le groupe Ω_*^{Spin} ($\Omega_*^{\text{Spin}^{\mathbb{C}}}$) peut être également défini à partir des variétés M munies d'une Spin-(Spin^C-) structure dans le fibré normal stable νM . Comme $\tau M \oplus \nu M$ est un Spin^C-fibré trivial, il est facile de voir que $\det \tau M \simeq \overline{\det \nu M}$.

§ 2 - SOUS-VARIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES

A chaque Spin^C -variété M , on peut associer des sous-variétés caractéristiques V de codimension 2, munies d'une Spin-structure canonique. La situation est analogue en tout point à celle qui a été étudiée par Conner et Floyd [21] dans le cadre des U -et SU -variétés.

2.1. Le lemme suivant est une conséquence de la transversalité de R. Thom :

LEMME 1. Soient W une variété compacte et $\Xi = (E, p, W)$ un fibré vectoriel lisse sur W . En particulier, E est une variété lisse dont le bord bE coïncide avec $p^{-1}(bW)$. On n'exclut pas le cas où $bW = \emptyset$. Soit $s : bW \rightarrow bE$ une section lisse de $\Xi|_{bW}$ transverse à la section nulle $bW \subset bE$.

Alors, il existe une section lisse $S : W \rightarrow E$ de Ξ qui prolonge s et qui est transverse à la section nulle $W \subset E$.

Démonstration. Voir Appendice I.

Soit M une variété close et $\xi = (E, p, M)$ un fibré vectoriel lisse sur M . Le lemme affirme l'existence d'une section $S : M \rightarrow E$ de ξ transverse à la section nulle $M \subset E$. Alors $S^{-1}(M) = V$ est une sous-variété close de M . Le fibré normal de M dans E s'identifie canoniquement avec ξ . La transversalité fournit alors un isomorphisme $J : \zeta \rightarrow j^* \xi$, où ζ est le fibré normal de V dans M , alors que $j : V \rightarrow M$ est l'injection canonique.

DÉFINITION. On appellera sous-variété caractéristique de (M, ξ) toute paire (V, J) obtenue comme ci-dessus à partir d'une section S . Lorsque cela ne peut

entraîner de confusion, nous dirons, par abus de langage, que V est une sous-variété caractéristique de (M, ξ) , sans mentionner J .

2.2. Supposons maintenant que M est une $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -variété close et que ξ est un $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -fibré. Pour toute sous-variété caractéristique (V, J) de (M, ξ) , on a une décomposition $j^* \tau M = \tau V \oplus \zeta$, ce qui donne, à l'aide de J , une décomposition $j^* \tau M = \tau V \oplus j^* \xi$. On peut donc munir τV d'une $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -structure et transformer V en $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -variété.

2.3. Dans les hypothèses précédentes, supposons donné un isomorphisme $K : \det \tau M \rightarrow \det \xi$. On a alors $\det \tau V \otimes_{\mathbb{C}} j^* \det \xi = j^* \det \tau M = j^* \det \xi$, ce qui donne une trivialisatation de $\det \tau V$, donc, en vertu de 1.3, une Spin -structure sur V .

On vérifie immédiatement que cette Spin -structure est définie d'une manière unique à équivalence près par la $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -structure de M et par K .

2.4. Considérons plus particulièrement le cas où $\xi = \omega_1 \oplus \omega_2$.

LEMME 2. Soient M une variété close, $\omega_i = (E_i, p_i, M)$ ($i = 1, 2$) deux fibrés vectoriels lisses, $\xi = \omega_1 \oplus \omega_2 = (E, p, M)$ la somme de Whitney de ω_1 et ω_2 . Supposons donnée une section lisse $s_1 : M \rightarrow E_1$ de ω_1 transverse à la section nulle $M \subset E_1$. Alors, il existe une section lisse $s_2 : M \rightarrow E_2$ transverse à la section nulle $M \subset E_2$ telle que :

(i) la section $s : M \rightarrow E$ de ξ définie par $s(x) = (s_1(x), s_2(x)) \in E \subset E_1 \times E_2$, $x \in M$, soit également transverse à la section nulle $M \subset E$ du fibré ξ et

(ii) les sous-variétés caractéristiques correspondant aux sections s_1 et s_2 se coupent transversalement.

Démonstration. Voir Appendice I .

Dans les hypothèses du lemme 2, les sections s_1, s_2 et s définissent trois sous-variétés V_1, V_2 et V de M . La variété V_α ($\alpha = 1, 2$) est une sous-variété caractéristique de (M, ω_α) , alors que V est une sous-variété caractéristique de (M, ξ) . On notera $j_\alpha : V_\alpha \rightarrow M$, $j : V \rightarrow M$ les injections canoniques, ζ_α, ζ les fibrés normaux et $J_\alpha : \zeta_\alpha \rightarrow j_\alpha^* \omega_\alpha$, $J : \zeta \rightarrow j^* \xi$ les isomorphismes correspondant aux sections s_α et s .

On voit d'autre part que V coïncide avec l'image réciproque par $s_2|_{V_1}$ de la section nulle de $j_1^* \omega_2^-$. Donc, V peut être considérée comme sous-variété caractéristique de (V_1, ξ_1) où $\xi_1 = j_1^* \omega_2$. De même, V est une sous-variété caractéristique de (V_2, ξ_2) où $\xi_2 = j_2^* \omega_1$. On note $i_\alpha : V \rightarrow V_\alpha$ les injections canoniques, β_α les fibrés normaux correspondants, $I_\alpha : \beta_\alpha \rightarrow i_\alpha^* \xi_\alpha$ les isomorphismes correspondants. Remarquons que, comme V_1 et V_2 se coupent transversalement, on a des isomorphismes canoniques $\zeta = \beta_1 \oplus \beta_2$, $\xi_2 = i_1^* \zeta_1$, $\xi_1 = i_2^* \zeta_2$. Avec ces identifications, $I_1 : \beta_1 \rightarrow i_1^* \xi_1 = i_1^* j_1^* \omega_2 = i_2^* j_2^* \omega_2$ coïncide avec la restriction $J_2|_{V_1} : i_2^* \zeta_2 \rightarrow i_2^* (j_2^* \omega_2)$. De même, $I_2 : \beta_2 \rightarrow i_2^* \xi_2 = i_2^* j_2^* \omega_1 = i_1^* j_1^* \omega_1$ coïncide avec $J_1|_{V_2}$. Enfin, $J : \zeta \rightarrow j^* \xi$ coïncide avec $I_1 \oplus I_2 = J_2|_{V_1} \oplus J_1|_{V_2}$.

Supposons maintenant que ω_1 et ω_2 sont des Spin^C -fibrés et que M est une Spin^C -variété. Soit $K : \det \tau M \rightarrow \det \xi = \det \omega_1 \otimes_{\mathbb{C}} \det \omega_2$ un isomorphisme. Pour $\alpha = 1, 2$, on a l'équation $\tau V_\alpha \oplus \zeta_\alpha = j_\alpha^* \tau M$ qui donne, à l'aide de J_α , $\tau V_\alpha \oplus j_\alpha^* \omega_\alpha = j_\alpha^* \tau M$, donc $\det \tau V_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} j_\alpha^* \det \omega_\alpha = j_\alpha^* \det \tau M$ et finalement, à l'aide de K , $\det \tau V_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} j_\alpha^* \det \omega_\alpha = j_\alpha^* \det \xi = j_\alpha^* \det \omega_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} j_\alpha^* \det \omega_{\bar{\alpha}}$, où $\bar{\alpha} = 1$ pour $\alpha = 2$ et $\bar{\alpha} = 2$ pour $\alpha = 1$. Ainsi K détermine un isomorphisme $K_\alpha : \det \tau V_\alpha \rightarrow j_\alpha^* \det \omega_{\bar{\alpha}} = \det \xi_\alpha$.

Maintenant on voit que l'on a défini sur V trois Spin -structures par le procédé 2.3 : une à l'aide de K , V étant considérée comme sous-variété

caractéristique de (M, ξ) , et deux autres à l'aide de K_1 et K_2 , V étant considéré comme sous-variété caractéristique de (V_1, ξ_1) et (V_2, ξ_2) .

PROPOSITION. Les trois Spin-structures coïncident.

Démonstration. En utilisant les identifications ci-dessus et à l'aide de J , on a :

$$\tau V \oplus j^* \omega_1 \oplus j^* \omega_2 = j^* \tau M, \text{ d'où :}$$

$$(*) \quad \det \tau V \otimes_{\mathbb{C}} j^* \det \omega_1 \otimes_{\mathbb{C}} j^* \det \omega_2 = j^* \det \tau M.$$

Si l'on utilise l'isomorphisme $K : \det \tau M \rightarrow \det \xi = \det \omega_1 \otimes_{\mathbb{C}} \det \omega_2$,

(*) donne la première des trois Spin-structures ci-dessus.

D'autre part, on a : $j^* \det \tau M = i_1^* j_1^* \det \tau M = i_1^* (\det \tau V_1 \otimes_{\mathbb{C}} \det \zeta_1) = i_1^* \det \tau V_1 \otimes_{\mathbb{C}} j^* \det \omega_1$ (à l'aide de J_1). L'identification (*) se transforme donc en $\det \tau V \otimes_{\mathbb{C}} j^* \det \omega_2 = i_1^* \det \tau V_1$ et donne, à l'aide de K_1 : $\det \tau V_1 \rightarrow \det \xi_1 = j_1^* \det \omega_2$ la Spin-structure de V en tant que sous-variété caractéristique de (V_1, ξ_1) . Le fait qu'il s'agit de la même structure dans les deux cas découle de la définition de K_1 .

Même raisonnement pour V_2 et K_2 .

2.5. Soient maintenant M^n une $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -variété close, $\xi = \det \tau M$, (V^{n-2}, J)

une sous-variété caractéristique de (M, ξ) et $K : \det \tau M \rightarrow \det \xi = \det \tau M$

l'application identique. Alors, V est munie d'une Spin-structure bien définie à équivalence près.

PROPOSITION. La classe de V dans $\Omega_{n-2}^{\text{Spin}}$ ne dépend que de la classe de M dans $\Omega_n^{\text{Spin}^{\mathbb{C}}}$.

Démonstration. Nous allons appliquer deux fois le lemme 1.

Soient d'abord (V_0, J_0) et (V_1, J_1) deux sous-variétés caractéristiques de (M, ξ) définies par deux sections s_0 et s_1 . On pose $W = M \times I$, $bW = (M \times 0) \cup (M \times 1)$. La variété $V = (V_0 \times 0) \cup (V_1 \times 1)$ est une sous-variété caractéristique de $(bW, \Xi | bW)$ où $\Xi = \text{pr}_1^* \xi = \det \tau W$. D'après le lemme 1 (cf. 2.1.), il existe une section S de Ξ qui prolonge $s = s_0 \cup s_1$ et qui est transverse à la section nulle de Ξ . Alors la variété $S^{-1}(W) \subset W$ coupe bW transversalement et $S^{-1}(W) \cap bW = V$. Il existe une identification canonique entre le fibré normal ζ de V dans M et la restriction sur V du fibré normal γ de $S^{-1}(W)$ dans W . Avec cette identification, l'isomorphisme $\gamma \rightarrow i^* \Xi$ (où $i : S^{-1}(W) \rightarrow W$ est l'injection) correspondant à S , prolonge J . Ceci permet de munir $S^{-1}(W)$ d'une Spin-structure qui prolonge celle de V , et donc d'obtenir un cobordisme entre V_0 et V_1 .

Ainsi, la classe de cobordisme d'une sous-variété caractéristique de M ne dépend que de M .

D'un autre côté, supposons que $M = bW$, où W est une Spin^C -variété, $\Xi = \det \tau W$, $\xi = \det \tau M$ et (V, J) est une sous-variété caractéristique de (M, ξ) . Comme ci-dessus, on peut construire une sous-variété $S^{-1}(W) \subset W$ munie d'une Spin-structure telle que $b(S^{-1}(W)) = V$, ce qui démontre la proposition.

Il découle de ce qui précède que l'on peut définir un homomorphisme homogène de degré -2 , $\partial : \Omega_*^{\text{Spin}^C} \rightarrow \Omega_*^{\text{Spin}}$. Cet homomorphisme jouera un rôle important par la suite.

2.6. Dans le cas qui nous intéresse, le fibré $\xi = \det \tau M$ est un SO_2 -fibré. La connaissance d'une sous-variété caractéristique de (M, ξ) détermine le fibré ξ à isomorphisme près. Nous aurons besoin par la suite d'une affirmation plus précise.