Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

FONCTIONS ENTIÈRES TOTALES EN CARACTÉRISTIQUE FINIE

David Adam & Michael Welter

Tome 143
Fascicule 1

2015

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 109-124

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 143, janvier 2015

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)

Abonnement Europe : 176 €, hors Europe : 193 € ($ 290)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Bull. Soc. math. France
143 (1), 2015, p. 109–124

FONCTIONS ENTIÈRES TOTALES EN CARACTÉRISTIQUE FINIE

PAR DAVID ADAM & MICHAEL WELTER

RÉSUMÉ. — En 1968, Fridman a montré qu'une fonction f entière totale sur $\mathbb{C}$ et telle que $\overline{\lim}_{r \to +\infty} \frac{\ln(\ln |f|_r)}{r} < \ln(1+e^{-1})$ est un polynôme. Récemment, la borne $\ln(1+e^{-1})$ a été améliorée en $\ln 2$ par le second auteur. Nous introduisons ici une notion de fonction entière totale en caractéristique finie. Nous présentons un analogue en caractéristique finie du théorème de Fridman-Welter basé sur cette notion. Divers H-analogues de ce résultat sont aussi considérés.

ABSTRACT (*Totally entire functions in finite characteristic*). — In 1968 Fridman showed that an entire function f which together with all its derivatives takes integer values at the positive integers and $\overline{\lim}_{r \to +\infty} \frac{\ln(\ln |f|_r)}{r} < \ln(1+e^{-1})$ is a polynomial. The bound $\ln(1+e^{-1})$ was improved to $\ln 2$ by the second author. We introduce the notion of a totally entire function in finite characteristic and present an analog of the Fridman-Welter theorem in finite characteristic. Also several analog results are considered.

Texte reçu le 23 janvier 2012, révisé le 18 juin 2012 et le 6 mars 2014, accepté le 3 mai 2014.

DAVID ADAM • *E-mail :* david.adam@upf.pf, GAATI, Université de la Polynésie française, BP 6570, 98702 Faa'a, Tahiti, Polynésie française
MICHAEL WELTER • *E-mail :* welter@math.uni-bonn.de, Mathematisches Institut, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Endenicher Allee 60, 53115 Bonn, Deutschland

Classification mathématique par sujets (2000). — 11R58.

Mots clefs. — Fonctions entières arithmétiques, derivées de Hasse, intégrale de Schnirelman, lemme de Siegel.

Les auteurs remercient l'arbitre anonyme pour sa lecture attentive et ses remarques pertinentes qui ont permis d'améliorer de manière substantielle cet article.

1. Introduction

En 1915, Pólya montra le

THÉORÈME 1 ([17]). — *Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}$ telle que*

$$f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z} \text{ et } \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln|f|_r}{r} < \ln 2, \text{ où } |f|_r = \sup_{|z|\leq r} |f(z)|.$$

Alors, f est un polynôme. De plus, la borne $\ln 2$ *est optimale.*

Fridman obtint le résultat suivant

THÉORÈME 2 ([11, Theorem 6]). — *Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}$ telle que*

1. $f^{(\sigma)}(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ *pour tout* $\sigma \in \mathbb{N}$ *et*
2. $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\ln(\ln|f|_r)}{r} < \ln(1+e^{-1})$.

Alors, f est un polynôme.

Ce résultat fut amélioré par le second auteur. Dans [22], il montre le

THÉORÈME 3 ([22, Corollary 3.3]). — *Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}$ telle que*

1. $f^{(\sigma)}(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ *pour tout* $\sigma \in \mathbb{N}$ *et*
2. $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\ln(\ln|f|_r)}{r} < \ln 2$.

Alors, f est un polynôme.

De même, si l'on considère des fonctions à valeurs entières entières sur $\mathbb{Z}$, on a le

THÉORÈME 4 ([22, Theorem 3.4]). — *Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}$ telle que*

1. $f^{(\sigma)}(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ *pour tout* $\sigma \in \mathbb{N}$ *et*
2. $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\ln(\ln|f|_r)}{r} < \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Alors, f est un polynôme.

De plus une fonction entière non-polynomiale f à valeurs entières sur $\mathbb{Z}$ telle que $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\ln(\ln|f|_r)}{r} < 2.638$ est construite dans [20]. En 1995, Car a montré un analogue du théorème 1 en caractéristique finie (voir [7, Theorem IV.9]). Dans [9], Delamette a amélioré le résultat de Car. Le premier auteur a obtenu l'analogue complet du théorème 1 en caractéristique finie [1, Theorem 6]. Des généralisations ont alors été données (voir [8]). Dans [3], un premier analogue du théorème 4 en caractéristique finie est montré :
Soit $q = p^f$ une puissance d'un nombre premier p et Ω le complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q((1/T))$ pour la valuation $1/T$-adique v normalisée par

$v(T) = -1$. Pour tout $z \in \Omega$, on note $\deg(z) = -v(z)$. Soit $r > 0$. On note $\mathbb{D}_r$ le disque fermé de centre r et rayon r, c'est-à-dire

$$\mathbb{D}_r = \{z \in \Omega \mid \deg z \leq r\}.$$

DÉFINITIONS 5. — 1. *Une fonction f est dite* analytique sur $\mathbb{D}_r$ *si elle peut s'écrire sous la forme d'une série*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad \textit{avec } a_n \in \Omega \textit{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

qui converge pour tout $z \in \mathbb{D}_r$.

2. *Une* fonction entière sur Ω *est une fonction analytique sur Ω.*
3. *Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, le* module de croissance de f *(voir* [7]*), noté $M(f, r)$, est défini par*

$$M(f, r) = \sup_{\substack{z \in \Omega \\ \deg(z) \leq r}} \{\deg(f(z))\}.$$

On a alors

THÉORÈME 6 ([3, Theorem 9]). — *Soit f une fonction entière sur Ω telle que*

1. $\overline{\lim}_{r \to +\infty} \frac{M(f,r)}{q^r} < \frac{p}{e \ln q}$ *et*
2. $f^{(\sigma)}(\mathbb{F}_q[T]) \subset \mathbb{F}_q[T]$ *pour tout $\sigma \in \{0, \cdots, p-1\}$.*

Alors, f est un polynôme.

De plus, la borne $\frac{p}{e \ln q}$ est optimale, comme le montre la fonction Ψ^p où

$$\Psi(z) = \sum_{n \geq 0} \prod_{\substack{h \in \mathbb{F}_q[T] \\ \deg h < n}} \frac{z - h}{T^n - h}.$$

REMARQUE 7. — *Ceci est bien un analogue du théorème 4, car pour tout $\sigma \geq p$, on a $f^{(\sigma)} = 0$.*

Ici, nous proposons un deuxième analogue du théorème 4, basé sur une notion de "dérivée" qui préserve à la fois les propriétés analytiques et arithmétiques de la dérivée classique (voir [4]). Pour ceci, nous aurons besoin de la notion de dérivée de Hasse.

DÉFINITION 8. — [14] *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ une fonction entière sur Ω. On appelle* n-ème dérivée de Hasse *et on note $\mathscr{D}^n(f)$ la fonction entière :*

$$\mathscr{D}^n(f)(z) = \sum_{k \geq n} a_k \binom{k}{n} z^{k-n}.$$