Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CORRESPONDANCE DE JACQUET-LANGLANDS ET DISTINCTION

Charlène Coniglio-Guilloton

Tome 144
Fascicule 2

2016

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 163-216

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 144, juin 2016

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 178 €, hors Europe : 194 € ($ 291)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Bull. Soc. math. France
144 (2), 2016, p. 163–216

CORRESPONDANCE DE JACQUET-LANGLANDS ET DISTINCTION : CAS DES REPRÉSENTATIONS CUSPIDALES DE NIVEAU 0

PAR CHARLÈNE CONIGLIO-GUILLOTON

RÉSUMÉ. — Soit $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ une extension quadratique modérément ramifiée de corps locaux non archimédiens. Soit $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ une forme intérieure de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ et $\mathrm{GL}_\mu(\Delta) = (\mathrm{M}_m(\mathscr{D}) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K})^\times$. Alors $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)$ est une forme intérieure de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et les quotients $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)/\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ sont des espaces symétriques. En utilisant la paramétrisation de Silberger et Zink, nous déterminons des critères de $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinction pour les représentations cuspidales de niveau 0 de $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)$ qui sont l'image d'une représentations cuspidale de niveau 0 par Jacquet-Langlands, puis nous prouvons qu'une représentation cuspidale de niveau 0 de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-distinguée si et seulement si son image par la correspondance de Jacquet-Langlands est $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguée.

ABSTRACT (*Jacquet-Langlands correspondence and distinction: the case of cuspidal level 0 representations*)

Let $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ be a tamely ramified quadratic extension of non-archimedean locally compact fields. Let $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ be an inner form of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ and $\mathrm{GL}_\mu(\Delta) = (\mathrm{M}_m(\mathscr{D}) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K})^\times$. Then $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)$ is an inner form of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ and the quotients $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)/\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ and $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ are symmetric spaces. Using the parametrization of Silberger and Zink, we determine conditions of $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinction for level zero cuspidal representations of $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)$ which are the image of a level zero cuspidal representation of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ by the Jacquet-Langlands correspondence. We also show that a level zero cuspidal representation of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ is $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-distinguished if and only if its image by the Jacquet-Langlands correspondence is $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinguished.

Texte reçu le 9 septembre 2013, accepté le 1er mai 2015.

CHARLÈNE CONIGLIO-GUILLOTON, Département de Mathématiques, Téléport 2 - BP 30179, Boulevard Marie et Pierre Curie, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France •
E-mail : `Charlene.Coniglio@math.univ-poitiers.fr`

Introduction

Soit $\mathbb{F}$ un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p, supposée impaire. Nous noterons $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ une extension quadratique séparable modérément ramifiée de corps locaux non archimédiens. On fixe un entier naturel n non nul et on note $G_{\mathbb{F}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ et $G_{\mathbb{K}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On fixe un diviseur d de n ($dm = n$) et $\mathscr{D}$ une $\mathbb{F}$-algèbre à division centrale d'indice d (i.e de dimension d^2 sur son centre $\mathbb{F}$). Enfin, on note $H_{\mathbb{F}} = \mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$ et $H_{\mathbb{K}} = (\mathrm{M}_m(\mathscr{D}) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K})^{\times}$. Il existe un diviseur μ de n et une $\mathbb{K}$-algèbre à division centrale Δ d'indice $\delta = n/\mu$ tels que $H_{\mathbb{K}} = \mathrm{GL}_{\mu}(\Delta)$ (on remarque que $G_{\mathbb{K}} = H_{\mathbb{K}}$ et $G_{\mathbb{F}} = H_{\mathbb{F}}$ lorsque $d = 1$). On a le résultat suivant :

Théorème ([12], [18], [5], [1]). — *Il existe une unique bijection, appelée correspondance de Jacquet-Langlands :*

$$JL : \mathscr{R}^2(G_{\mathbb{K}}) \to \mathscr{R}^2(H_{\mathbb{K}})$$

telle que pour tous $(g, \widetilde{g}) \in H_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}}$ *elliptiques réguliers de même polynôme minimal, et toute représentation* $\pi \in \mathscr{R}^2(G_{\mathbb{K}})$, *on a :*

$$\Theta_{\pi}(\widetilde{g}) = (-1)^{\mu \times (\delta - 1)} \Theta_{JL(\pi)}(g)$$

où $\mathscr{R}^2(G_{\mathbb{K}})$ *(resp.* $\mathscr{R}^2(H_{\mathbb{K}})$*) sont les classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles membres de la série discrète de* $G_{\mathbb{K}}$ *(resp.* $H_{\mathbb{K}}$*) et* Θ *désigne le caractère d'Harish Chandra.*

Lorsque $n = 2$ et $d = 2$ alors $G_{\mathbb{K}} = H_{\mathbb{K}} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, $G_{\mathbb{F}} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$, $H_{\mathbb{F}} = \mathscr{D}^{\times}$ et la correspondance de Jacquet-Langlands est l'application identité. Dans ce cas, les travaux de J. Hakim et de D. Prasad nous montrent qu'une série discrète (en niveau quelconque) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$-distinguée si et seulement si elle est $\mathscr{D}^{\times}$-distinguée (on pourra se référer dans [9] au Théorème 9.1 page 21 pour les représentations cuspidales de caractère central trivial ainsi qu'au Théorème 7.1 page 16 pour la représentation de Steinberg et ses tordues ou on pourra retrouver ce résultat dans [14] Théorème C).

Plus généralement, les travaux de J. Hakim et F. Murnaghan dans [10] (Théorème 11.1 page 1887) nous donnent des critères de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-distinction pour les représentations cuspidales modérées de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (là aussi en niveau quelconque).

Dans le travail qui suit, nous généralisons les résultats évoqués précédemment dans le cas des représentations cuspidales de niveau 0. Avec les articles [19] et [20], A. Silberger et E. W. Zink montrent que la correspondance de Jacquet-Langlands se restreint en une bijection :

$$JL : \mathscr{R}^2_0(G_{\mathbb{K}}) \to \mathscr{R}^2_0(H_{\mathbb{K}})$$

où $\mathscr{R}_0^2(G_{\mathbb{K}})$ (resp. $\mathscr{R}_0^2(H_{\mathbb{K}})$) sont les classes d'isomorphisme des représentations lisses irréductibles membres de la série discrète de niveau 0. De plus, les articles [19] et [20] nous donnent une paramétrisation de ces séries discrètes de niveau 0 via des paires admissibles modérées et montrent que si $\pi \in \mathscr{R}_0^2(G_{\mathbb{K}})$ est une représentation cuspidale de niveau 0 alors son image par la correspondance de Jacquet-Langlands est aussi une représentation cuspidale de niveau 0. Enfin, [19] et [20] nous donnent une construction explicite (comme induite compacte) de ces représentations à partir de la paire admissible modérée qui leur est associée.

Dans un premier temps, nous déterminons des conditions nécessaires et suffisantes de $\mathrm{GL}_m(\mathscr{D})$-distinction pour les représentations cuspidales de niveau 0 de $\mathrm{GL}_\mu(\Delta)$ qui sont l'image d'une représentation cuspidale de niveau 0 de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ par la correspondance de Jacquet-Langlands. Puis, dans un deuxième temps, nous montrons qu'une représentation cuspidale $\pi \in \mathscr{R}_0^2(G_{\mathbb{K}})$ est $G_{\mathbb{F}}$-distinguée si et seulement si son image par la correspondance de Jacquet-Langlands, $JL(\pi)$, est $H_{\mathbb{F}}$-distinguée, généralisant ainsi le résultat d'Hakim (en niveau 0).

Expliquons notre démarche. Dans la suite, G désignera le groupe $G_{\mathbb{K}}$ ou $H_{\mathbb{K}}$, H désignera le sous-groupe fermé $G_{\mathbb{F}}$ (resp. $H_{\mathbb{F}}$) de G, et $\mathscr{K}$ un sous-groupe ouvert compact modulo le centre maximal de G de la forme $\mathscr{K} = \langle \varpi_{\mathbb{K}} \rangle \mathscr{U}$, où $\mathscr{U}$ est un sous-groupe parahorique de G (par exemple $\mathscr{K} = \mathbb{K}^\times \mathrm{GL}_\mu(\mathscr{O}_\Delta)$ si $G = H_{\mathbb{K}}$). Rappelons qu'une représentation complexe (π, V) du groupe G est distinguée par H s'il existe une forme linéaire non nulle $\varphi : V \to \mathbb{C}$ qui est H-invariante, ce qui revient à dire que l'espace d'entrelacement $\mathrm{Hom}_H(\pi, \mathbb{1})$ est non nul. Nous allons utiliser le fait qu'une représentation cuspidale (de niveau 0) de G est une induite compacte. Soit π_0 une représentation lisse de $\mathscr{K}$. La formule de restriction de Mackey ainsi que la réciprocité de Frobenius pour l'induction compacte montrent que la représentation $\pi = \mathrm{c} - \mathrm{Ind}_{\mathscr{K}}^G \pi_0$ de G est distinguée par le sous-groupe H si et seulement s'il existe s dans le double quotient $H \backslash G / \mathscr{K}$ tel que l'espace $\mathrm{Hom}_{s^{-1}Hs \cap \mathscr{K}}(\pi_0, \mathbb{1})$ soit non nul. Dans notre cas, nous allons restreindre le nombre de doubles classes à étudier en utilisant un résultat de [11] (Proposition 5.20 page 94), que nous appliquons dans notre contexte en 3.3.2. D'après ce résultat, les seuls éléments s de $H \backslash G / \mathscr{K}$ qui contribuent à la distinction vérifient en particulier l'égalité $\sigma(s\mathscr{K}s^{-1}) = s\mathscr{K}s^{-1}$ où σ est l'élément non trivial du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$. Enfin, si $X_{\mathbb{K}}$ est l'immeuble de Bruhat-Tits de G sur $\mathbb{K}$, $X_{\mathbb{F}}$ celui de H sur $\mathbb{F}$ et $j : X_{\mathbb{F}} \to X_{\mathbb{K}}$ l'injection naturelle entre ces immeubles, les travaux de G.Prasad et J.K.Yu dans [16], que nous rappelons en 2.0.3, nous montrent que les sommets de $X_{\mathbb{K}}$ stables par l'action de $\langle \sigma \rangle$ sont exactement les sommets de $X_{\mathbb{K}}$ qui sont dans l'image de $X_{\mathbb{F}}$ par j. Après avoir appliqué ces deux résultats, il nous reste, la plupart du temps, au plus une double classe à considérer. Lorsque nous recherchons des critères de $H_{\mathbb{F}}$-distinction par exemple, nous sommes ramenés