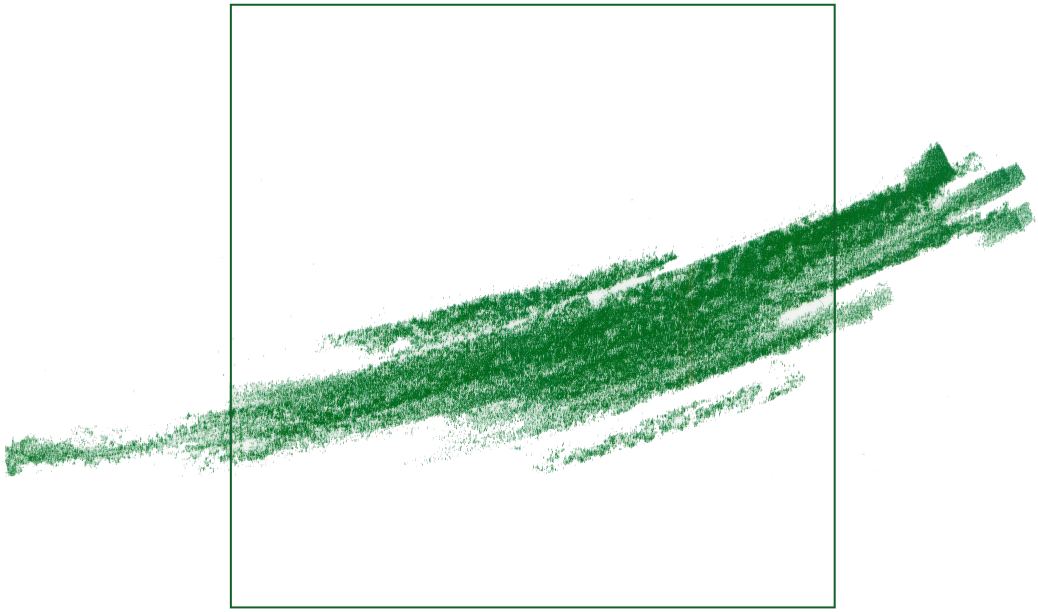
COURS SPÉCIALISÉS
COLLECTION SMF

Percolation et modèle d'Ising

Wendelin WERNER



16

PERCOLATION ET MODÈLE D'ISING

Wendelin Werner

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS	EDP Sciences
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248	17, avenue du Hoggar
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940	91944 les Ulis Cedex A
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA	France
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org	www.epdsciences.com

Tarifs

Vente au numéro : 40 € ($ 60)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Cours Spécialisés
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-276-1

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

COURS SPÉCIALISÉS 16

PERCOLATION ET MODÈLE D'ISING

Wendelin Werner

Société Mathématique de France 2009

L'un des principaux buts de la théorie des probabilités est de comprendre et décrire le comportement à grande échelle de systèmes aléatoires. On commence en général au niveau Licence puis Master par aborder le cas particulier des sommes de variables aléatoires indépendantes. Cependant, de nombreux systèmes autour de nous peuvent être considérés comme étant aléatoires sans pour autant que l'on puisse les décrire à grande échelle via une simple loi des grands nombres ou un théorème central limite. Ceci peut être dû au fait que les variables aléatoires qui décrivent le système ne sont pas indépendantes ou/et que l'on s'intéresse à d'autres quantités observables que les sommes/moyennes de ces variables aléatoires. Comme nous allons le voir, les systèmes de particules physiques où la position de ces particules dans l'espace joue un rôle important, fournit de tels cas.

Le but de ce cours (enseigné ces dernières années dans le cadre du premier semestre de la seconde année de Master de mathématiques à l'université Paris-Sud à Orsay) est de décrire le type de problèmes que l'on rencontre alors et de présenter quelques résultats et techniques pour certains modèles concrets et classiques de la physique statistique. Plus précisément, on se concentrera tout d'abord sur la *percolation*. Il s'agit d'un modèle construit à partir de simples variables de Bernoulli indépendantes (c'est-à-dire une succession de tirages à pile ou face), mais où l'on s'intéresse à des fonctionnelles très non-linéaires du système. Dans ce cas, il n'y a aucun problème pour définir le modèle et on peut s'attaquer tout de suite à l'étude de celui-ci. On étudiera tout particulièrement le changement de phase pour l'existence ou non de chemins infinis.

Dans un second temps, on étudiera certains aspects du *modèle d'Ising*. Afin de mieux exploiter les techniques déjà exposées pour la percolation, on le rattachera au modèle de percolation dépendante appelée FK-percolation. Pour ce second modèle, on verra la difficulté inhérente à la définition d'une infinité de variables aléatoires dépendant les unes des autres, et on étudiera aussi certaines questions liées aux changements de phase.

Dans ces deux cas, il apparaîtra que du point de vue mathématique, de nombreuses questions de base ne sont pas résolues à ce jour. Je présenterai certains résultats très récents (2001 et 2007) dus à Stas Smirnov pour la percolation et le modèle d'Ising en dimension 2. Plus précisément, on prouvera l'invariance conforme de ces deux modèles au point critique et sur certains réseaux. D'une certaine façon, on peut dire que l'ensemble de ce cours est construit autour de ces deux résultats. On met d'abord en place les outils nécessaires en partant des connaissances d'un cours de niveau Licence ou première année de Master (on supposera connues les bases de la théorie de la mesure – loi du 0–1, tribus produits –, ainsi que la théorie des chaînes de Markov à espaces d'états dénombrables), et ces preuves d'invariance conforme combinent la plupart des arguments et des résultats développés dans cet ouvrage. Le lecteur constatera en fait que des idées et preuves sont présentes dans beaucoup de chapitres.

Insistons sur le fait qu'il s'agit cependant ici d'un cours introductif à une thématique de recherche vaste et qu'il ne prétend pas faire le tour du sujet. En particulier, on n'abordera pas les aspects "grandes déviations" pour ces modèles, qui sont pourtant des questions naturelles et importantes en vue des applications. Il y aussi a clairement dans ce cours un biais vers les questions bidimensionnelles, reliées à l'analyse complexe. Cependant, nous n'aborderons pas les processus SLE introduits par Oded Schramm pour étudier les limites continues des modèles discrets critiques dans le plan. Le présent cours peut cependant servir d'introduction à cette thématique.

Afin de ne pas alourdir le texte, j'ai fait le choix de ne presque pas mettre de références bibliographiques pendant la présentation des résultats. En revanche, le dernier chapitre reprend l'ensemble du texte, et cite des articles dans lesquels ont été obtenus les principaux résultats abordés, ainsi que les ouvrages dans lesquels ils sont présentés de manière pédagogique. J'y donne également quelques autres liens pour celles et ceux qui souhaitent approfondir ces questions.

Je tiens à remercier toutes les personnes (et tout particulièrement Geoffrey Grimmett) qui ont permis grâce à leurs remarques, de faire en sorte que ces notes de cours contiennent moins d'erreurs (typographiques ou autres) que dans leur version initiale.

Orsay, Décembre 2008,

Wendelin Werner

TABLE DES MATIÈRES