BASES CRISTALLINES DES GROUPES QUANTIQUES

Masaki Kashiwara

rédigé par Charles Cochet

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

EDP Sciences
7, avenue du Hoggar
91944 les Ulis cedex A
France
www.edpsciences.com

Tarifs 2002

Vente au numéro : 23 € ($ 33)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Cours Spécialisés
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 1284-6090

ISBN 2-85629-126-0

Directeur de la publication : Michel WALDSCHMIDT

COURS SPÉCIALISÉS 9

BASES CRISTALLINES DES GROUPES QUANTIQUES

Masaki Kashiwara

rédigé par Charles Cochet

Société Mathématique de France 2002

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

Depuis leur introduction par Drinfeld ([**4**]) et Jimbo ([**8**]) en 1985 lors de l'étude des modèles exacts solubles, les algèbres enveloppantes quantiques sont devenues un des outils principaux pour décrire de nouvelles symétries. L'algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ contient un paramètre q. Lorsque $q = 1$, on retrouve l'algèbre enveloppante classique. Dans le contexte des modèles exacts solubles, le paramètre q représente la température et $q = 0$ correspond au zéro absolu.

À l'origine des bases cristallines est l'idée que la situation devait être plus simple au zéro absolu. Effectivement, en $q = 0$ on peut trouver une bonne base (dite *base cristalline*) des représentations de $U_q(\mathfrak{g})$. De plus, une action modifiée des vecteurs racines envoie la base cristalline sur elle-même, lui conférant une structure combinatoire riche. Nous pouvons ainsi réduire de nombreuses propriétés des représentations à la combinatoire des bases cristallines.

La notion de base cristalline fut introduite dans [**11**]. À la même période, G. Lusztig ([**24**]) définit les bases canoniques en analysant le travail de Ringel ([**30**]), qui construit le groupe quantique comme l'algèbre de Hall associée à un carquois. Il est intéressant de remarquer que ces notions similaires ont été cependant introduites avec des motivations très différentes.

Dans ce cours, nous présenterons les bases cristallines ainsi que leur application au calcul des multiplicités des poids et des coefficients du produit tensoriel de deux représentations.

Ce texte a été rédigé par Charles Cochet à partir d'un cours donné à l'Université Paris VI dans le cadre du DEA « Méthodes Algébriques » à l'automne 2000. Je tiens à le remercier chaleureusement pour son excellent travail. Je tiens également à remercier Pierre Schapira, Michèle Vergne, Andrea D'Agnolo, Bernard Leclerc ainsi que tous les membres de l'Équipe d'Analyse Algébrique de Paris VI, grâce auxquels mon séjour à Paris fut fructueux et agréable.

Ce cours a été dispensé alors que l'auteur bénéficiait d'une « Chaire de Recherche Internationale Blaise Pascal » de l'État et de la Région Ile-de-France, gérée par la Fondation de l'École Normale Supérieure.

Masaki Kashiwara

à Kyoto
septembre 2001

CHAPITRE 1

REPRÉSENTATIONS DE L'ALGÈBRE QUANTIQUE $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

L'algèbre quantique $U_q(\mathfrak{g})$ est une déformation de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$. Puisque toute algèbre quantique $U_q(\mathfrak{g})$ est engendrée par ses sous-algèbres isomorphes à $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ est fondamental. Nous commencerons donc par son étude.

1.1. Définition

Fixons un corps K de caractéristique arbitraire. L'algèbre $\mathfrak{sl}_2(K)$ classique est l'algèbre de Lie sur K engendrée par les éléments

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dans l'espace des matrices 2×2 à coefficients dans K. Leurs crochets sont donnés par

$$[h, e] = 2e\ ,\ [h, f] = -2f\ ,\ [e, f] = h. \tag{1.1.1}$$

Son *algèbre enveloppante* $U(\mathfrak{sl}_2(K)) = U(\mathfrak{sl}_2)$ est la K-algèbre engendrée par trois symboles e, f, h avec (1.1.1) pour relations de définition, où $[x, y]$ s'interprète comme $xy - yx$. Les représentations de dimension finie de $U(\mathfrak{sl}_2)$ sont bien comprises, comme l'atteste le

Théorème 1.1.1. — *Supposons K de caractéristique nulle.*

(1) *Les $U(\mathfrak{sl}_2)$-modules simples (dont les seuls sous-modules sont* 0 *et eux-même) sont les produits symétriques $S^n(K^2)$ de K^2, $n \geqslant 0$.*

(2) *Tout $U(\mathfrak{sl}_2)$-module de dimension finie est semi-simple, c'est-à-dire somme directe de modules simples.*

Le produit tensoriel de deux $U(\mathfrak{sl}_2)$-modules M et N est muni d'une structure de $U(\mathfrak{sl}_2)$-module définie par $x \cdot (u \otimes v) = (xu) \otimes v + u \otimes (xv)$ pour $u \in M$, $v \in N$ et $x = e, f, h$.

Fixons un élément q de K *non nul et non racine de l'unité.* L'*algèbre enveloppante quantique* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ de $\mathfrak{sl}_2$ est la K-algèbre engendrée par quatre symboles e, f, t, t^{-1} avec les relations de définition

$$\begin{aligned} t t^{-1} &= t^{-1} t = 1, \\ tet^{-1} &= q^2 e, \\ tft^{-1} &= q^{-2} f, \\ [e, f] &= \frac{t - t^{-1}}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

En posant $t = q^h$ et en faisant tendre q vers 1, nous retrouvons l'algèbre enveloppante classique $U(\mathfrak{sl}_2)$ (voir page 36 pour le sens précis).

Lemme 1.1.2. — *Il existe un unique homomorphisme de K-algèbres $\Delta = \Delta_-$ de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ dans $U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2)$, appelé* co-produit*, tel que*

$$e \longmapsto e \otimes t^{-1} + 1 \otimes e, \tag{1.1.2}$$

$$f \longmapsto f \otimes 1 + t \otimes f, \tag{1.1.3}$$

$$t^{\pm 1} \longmapsto t^{\pm 1} \otimes t^{\pm 1}. \tag{1.1.4}$$

Ici, la multiplication dans $U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2)$ est donnée par

$$(a_1 \otimes a_2) \circ (b_1 \otimes b_2) = (a_1 b_1) \otimes (a_2 b_2).$$

Démonstration. — Il nous faut prouver que

$$\begin{aligned} \Delta(t)\Delta(t^{-1}) &= \Delta(t^{-1})\Delta(t) = 1, \\ \Delta(t)\Delta(e)\Delta(t^{-1}) &= \Delta(q^2 e), \\ \Delta(t)\Delta(f)\Delta(t^{-1}) &= \Delta(q^{-2} f), \\ [\Delta(e), \Delta(f)] &= \Delta\big((t - t^{-1})/(q - q^{-1})\big). \end{aligned}$$

Vérifions la dernière égalité. Nous avons $\Delta(e)\Delta(f) = ef \otimes t^{-1} + et \otimes t^{-1} f + f \otimes e + t \otimes ef$ d'une part, et $\Delta(f)\Delta(e) = fe \otimes t^{-1} + te \otimes ft^{-1} + f \otimes e + t \otimes fe$ d'autre part. Or $te = q^2 et$ et $t^{-1} f = q^2 ft^{-1}$, d'où

$$\begin{aligned} [\Delta(e), \Delta(f)] &= [e, f] \otimes t^{-1} + t \otimes [e, f] \\ &= (q - q^{-1})^{-1} ((t - t^{-1}) \otimes t^{-1} + t \otimes (t - t^{-1})) \\ &= (q - q^{-1})^{-1} (t \otimes t - t^{-1} \otimes t^{-1}) \\ &= \Delta([e, f]). \end{aligned}$$

Les autres assertions se vérifient facilement. □