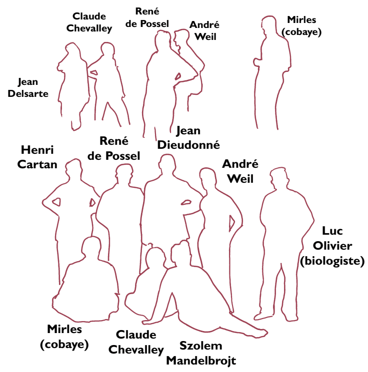
Dans cette maison
est né
le 12 juillet 1935
N. Bourbaki
mathématicien



Cette plaque a été apposée le 12 juillet 2003 par Alain Bouvier, recteur de l'académie, chancelier des universités de Clermont-Ferrand et André Gay, maire de Besse et Saint-Anastaise.

Photos prises à Besse-en-Chandesse entre le 10 et 17 Juillet 1935

Université Blaise Pascal

Imp. Numérique Pixel - Issoire - 04 73 55 29 90

Plaque commémorative de la naissance de Bourbaki.

Le rôle de Bourbaki dans les mathématiques du vingtième siècle

Christian Houzel

Commémoration de la naissance de N. Bourbaki,
Besse-en-Chandesse, 12 juillet 2003

Une plaque commémorative de la naissance de N. Bourbaki a été apposée par le Recteur de l'Académie de Clermont-Ferrand et le Maire de Besse[1] sur un mur extérieur de la station biologique de l'université Blaise Pascal ; celle-ci hébergea en effet en juillet 1935 la réunion plénière de fondation du groupe qui allait marquer profondément son empreinte sur les mathématiques du xx^{e} siècle.
La cérémonie, au cours de laquelle Christian Houzel présenta la conférence que l'on peut lire ci-dessous, a rassemblé 120 mathématiciens et élus locaux ; le seul survivant des sept fondateurs, Henri Cartan, avait envoyé un message de sympathie et nous lui avons adressé nos vœux pour son quatre-vingt-dix-neuvième anniversaire ; Jacques Mandelbrojt, fils de Szolem, était présent ainsi que Roger Godement. À l'issue de la cérémonie, les participants ont pu visiter une exposition sur « Bourbaki et l'Auvergne » et apprécier le vin d'honneur offert par la Municipalité.

P.-L. Hennequin

Nous fêtons aujourd'hui un anniversaire : il y a exactement 68 ans se réunissait ici, à Besse-en-Chandesse, le 10 juillet 1935, le premier Congrès Bourbaki ou « réunion plénière de fondation ». Un groupe de jeunes mathématiciens avait en effet décidé quelques mois auparavant, en décembre 1934, de travailler ensemble à la rédaction d'un grand « Traité d'analyse ». Le cours d'analyse d'Édouard Goursat, trois volumes datant du début du vingtième siècle, était alors la référence courante, mais nos jeunes mathématiciens le trouvaient vieillot et peu adapté aux développements plus récents des mathématiques, comme ce qu'ils avaient pu apprendre au cours de voyages en Allemagne à la fin des années vingt. Ils voulaient aussi inclure le point de vue du père de l'un d'entre eux, Élie Cartan (1869-1951), sur les formes différentielles extérieures et établir la formule générale de Stokes correspondante. Ce traité devait pouvoir servir aussi bien aux étudiants qu'aux mathématiciens, aux physiciens et aux ingénieurs.

La réunion de Besse s'est tenue du 10 au 20 juillet avec Claude Chevalley, Jean Dieudonné, René de Possel, Henri Cartan, Szolem Mandelbrojt, Jean Delsarte, André Weil, le physicien Jean Coulomb, Charles Ehresmann et un « cobaye » du nom de Mirles. Elle avait été préparée par un certain nombre de rapports sur les divers chapitres prévus pour le traité, chaque rapport ayant été confié à trois membres et attendu pour le 1er juillet. La liste de ces rapports, avec les noms des rapporteurs, se trouve dans l'annexe II. L'ordre du jour de la réunion était extrêmement chargé et on est étonné qu'il ait pu être tenu en dix jours ; il s'agissait

[1] Besse-en-Chandesse est un petit bourg médiéval et touristique d'Auvergne au sud du Sancy.

de discuter les divers rapports prêts et d'examiner en commission les parties les moins avancées dans leur préparation. Il en est sorti un gros dossier contenant des décisions de rédaction de chapitres ou de nouveaux rapports ; on trouvera, dans l'annexe III, un extrait de ce dossier. L'ouvrage devait comporter 2 500 à 3 000 pages et les rédactions étaient attendues pour des dates proches, qui se sont révélées irréalistes.

Le premier fascicule *Théorie des ensembles : Résultats* est paru seulement en 1940 (daté de 1939) et il a été suivi, dans les années quarante, des premiers chapitres de la *Topologie générale* et de l'*Algèbre*. Le projet avait complètement changé de nature et il était devenu une exposition systématique et unifiée des parties fondamentales des mathématiques selon la méthode axiomatique inspirée de Hilbert. Tout ce qui concerne le calcul différentiel, la géométrie, les fonctions analytiques, les équations fonctionnelles et les fonctions spéciales, et qui constituait l'essentiel du plan initial, a disparu.

Pour comprendre ce qui s'est passé, il faut resituer Bourbaki dans la conjoncture mathématique de l'époque. En effet la période 1935-1965, où se situe l'activité de Bourbaki, est assez particulière dans l'histoire des mathématiques. Elle se caractérise par un effort des mathématiciens pour remettre en chantier les bases de leurs théories et pour construire de nouvelles machineries théoriques dans l'espoir qu'elles permettraient d'aborder plus efficacement les problèmes sur lesquels on butait alors. Ce mouvement touchait presque tous les secteurs mathématiques et il se développait dans le monde entier et pas seulement en France. Voici quelques exemples de ces nouvelles machineries :

– L'algébrisation de la topologie et la création de l'algèbre homologique. Les recherches en topologie avaient abouti à des ouvrages de synthèse comme le *Lehrbuch der Topologie* de Seifert et Threlfall (1934) ou la *Topologie* d'Alexandroff et Hopf (1935), mais il restait plusieurs points obscurs et ces synthèses étaient chargées d'hypothèses et de restrictions gênantes. Dans la période suivante, ces restrictions ont été éliminées tandis que de nouvelles notions apparaissaient, comme celles de cohomologie (Alexander 1935, Kolmogoroff 1936), de groupes d'homotopie supérieurs (Cech 1932, Hurewicz 1935-1936), d'espace fibré (Seifert 1933, Whitney 1938, Ehresmann et Feldbau 1942), de classes caractéristiques (Stiefel 1939) ou de catégories et foncteurs (Eilenberg et Mac Lane 1942). Une nouvelle synthèse a pu paraître en 1952, les *Foundations of Algebraic Topology* d'Eilenberg et Steenrod. Ces nouvelles théories ont conduit au développement d'un nouvel outil algébrique, l'algèbre homologique, codifiée dans l'*Homological Algebra* de Cartan et Eilenberg en 1956.

– La théorie des faisceaux, issue des travaux de Leray sur la topologie algébrique et destinée à prendre en compte les relations entre les propriétés locales et les propriétés globales (Cours de captivité de Leray, publié en 1945 ; suite spectrale 1946 ; cours au Collège de France, publié en 1950. *Séminaire Cartan* 1948-1951. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux* de Godement, 1958).

– La géométrie algébrique abstraite et l'algèbre commutative. L'application de la géométrie algébrique à certains problèmes de théorie des nombres, spécialement en analyse diophantienne, nécessitait le développement d'une géométrie où les coordonnées ne sont plus nécessairement des nombres complexes, mais peuvent être prises dans un corps commutatif arbitraire, ou même dans un anneau commutatif. La première synthèse est celle d'André Weil, dans les *Foundations of algebraic geometry* (1946). Une autre démarche sera entreprise par J.-P. Serre dans l'article *Faisceaux algébriques cohérents* (1955) et poursuivie, d'une manière considérablement élargie, par Grothendieck à partir de 1957. Les moyens algébriques nécessaires à cette nouvelle géométrie, c'est-à-dire l'algèbre commutative, peuvent se trouver dans la *Commutative Algebra* de Samuel et Zariski (1958).

– L'analyse fonctionnelle, avec la théorie des distributions. Après l'impulsion donnée par les recherches sur les équations intégrales, le développement de ces théories était rendu nécessaire d'une part par l'élargissement de l'analyse de Fourier, d'autre part par les problèmes de la théorie des équations aux dérivées partielles (*Normierte Ringe* de Gelfand, 1941 ; article de Sobolev en 1936, *Théorie des distributions* de Schwartz, 1951).

– La théorie des représentations linéaires des groupes, en particulier des groupes de Lie (A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques*, 1940 ; travaux de Gelfand, Raikov et Neumark, 1943-1950, puis travaux de Mackey et ceux de Harish Chandra).

– L'axiomatisation des probabilités et la théorie des processus stochastiques (Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Warscheinlichkeitsrechnung*, 1933 ; N. Wiener, *Differential Space*, 1923 ; P. Lévy, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, 1948).

– Logique et théorie des modèles. Après les résultats d'incomplétude de Gödel en 1931, la logique mathématique a pris un nouveau départ avec d'un côté, vers 1936, les travaux de Kleene, Church et Turing sur la notion de calculabilité, de l'autre, avec les travaux de Tarski à partir de 1931 sur la théorie des modèles.

On notera que les collaborateurs de Bourbaki ont largement contribué à toutes ces constructions, exception faite de celles qui concernent les probabilités et la logique.

Cet effort de refondation a eu pour conséquence un certain repli des mathématiques sur elles-mêmes, repli encore accentué par un éloignement du côté des physiciens. Rappelons en effet que l'édification de la relativité générale et de la mécanique quantique avait été accompagnée d'une collaboration étroite entre mathématiciens et physiciens. Il suffit, pour s'en convaincre, de citer les noms de H. Weyl (*Raum, Zeit, Materie*, 1918 et *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 1928) ou de J. von Neumann (*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, 1932). Mais, dans les années trente, la demande de mathématiques de la part des physiciens a disparu et il a fallu attendre les années soixante-dix pour qu'elle soit vraiment réactivée, avec les théories de jauge, la théorie quantique des champs et la supersymétrie.

Le repli des mathématiques sur elles-mêmes, que nous venons d'esquisser, a donné un caractère particulier au développement des mathématiques en direction des applications pendant cette période, avec à terme une séparation de nature sociologique entre mathématiciens « purs » et mathématiciens « appliqués » ; une telle séparation n'était guère concevable dans les périodes précédentes. Il faut dire que l'effort de guerre a suscité, entre 1939 et 1945 puis après avec la guerre froide, un intense développement vers les applications (mécanique des fluides, probabilités et statistiques, recherche opérationnelle, etc.) ; ceci a eu lieu aux États-Unis, en

Grande Bretagne et en URSS, mais pas dans la France occupée, où les « mathématiques appliquées » sont apparues beaucoup plus tard, dans les années soixante.

La tradition mathématique française avant la deuxième guerre mondiale était principalement tournée vers l'analyse mathématique et elle ignorait presque totalement des secteurs développés dans d'autres pays, comme la topologie algébrique, la géométrie algébrique ou la théorie des nombres. Une des raisons de cet isolement français est sans doute l'hécatombe causée par la première guerre mondiale, qui a privé la France d'un renouvellement des générations de chercheurs. Lorsqu'on consulte l'annuaire des anciens élèves de l'École normale supérieure, on constate que près de la moitié de chaque promotion mobilisable a été tuée au combat. Mais, comme nous l'avons dit plus haut, nos jeunes mathématiciens avaient tous fait un séjour en Allemagne à la fin des années vingt et ils y avaient appris de nouvelles mathématiques, alors dominées par l'algèbre, avec l'École de Hilbert, E. Noether et E. Artin. Le livre de B. van der Waerden *Moderne Algebra* (1931) était devenu pour eux un modèle de rédaction, avec des énoncés précis de définitions, lemmes, propositions, théorèmes et corollaires. Ce style contrastait avec la rédaction assez lâche des mathématiques françaises antérieures, qui se présentait en général sous la forme d'un texte continu sans énoncé clair permettant des références. Et c'est par le style de ses rédactions que Bourbaki a eu l'influence la plus durable.

En suivant Hilbert, Bourbaki a adopté la méthode axiomatique d'exposition des mathématiques. Il s'en explique dans un article de 1948, « L'architecture des mathématiques » publié dans *Les grands courants de la pensée mathématique*. Cette méthode consiste, après avoir analysé les démonstrations des théorèmes pour en extraire les hypothèses utilisées, à poser ces hypothèses comme axiomes de la théorie et à ne plus faire intervenir que ces axiomes dans les démonstrations. Il en résulte une théorie beaucoup plus abstraite, mais dont le champ d'application est plus vaste. La méthode s'avère féconde, car elle permet de transporter des idées venant d'une application particulière au niveau abstrait et d'utiliser ensuite ces idées dans toutes les autres applications, mettant ainsi en œuvre une sorte de transfert d'intuition. La méthode axiomatique avait été élaborée par Hilbert pour analyser les fondements de la géométrie élémentaire et elle s'était développée en algèbre ainsi qu'en topologie générale. Bourbaki voulait l'étendre à l'ensemble des mathématiques.

Son entreprise était en effet dominée par l'idée de l'unité des mathématiques, idée très à la mode dans les années trente, comme en témoigne la thèse complémentaire d'Albert Lautman *Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur état actuel* (1938). Ce thème s'appuie sur le développement des mathématiques depuis la deuxième moitié du 19^{e} siècle, avec en particulier les constructions arithmétiques des nombres réels de Dedekind, Weierstrass et Cantor, qui ont permis de fonder l'analyse sur la théorie des nombres entiers, puis avec la théorie des ensembles qui englobe la théorie des nombres entiers vus comme les cardinaux finis. Bourbaki a donc intitulé son traité *Éléments de mathématique*, où « mathématique » est au singulier contrairement à l'usage français ; quant au mot « éléments », il se réfère au titre de l'ouvrage d'Euclide qui signifie « parties fondamentales » sur lesquelles se construisent les parties plus spécialisées.

La mathématique exposée selon la méthode axiomatique peut paraître très abstraite et le contenu de ses objets risque de se dissoudre. L'idée de structure intervient ici pour redonner du corps aux objets mathématiques. Elle répond à l'exigence