Revue d'histoire des mathématiques
17 (2011), p. 41–138

LOUIS POINSOT ET LA THÉORIE DE L'ORDRE : UN CHAÎNON MANQUANT ENTRE GAUSS ET GALOIS ?

Jenny Boucard

Résumé. — Louis Poinsot est un mathématicien surtout connu pour ses travaux en mécanique et géométrie. Il est pourtant cité à plusieurs reprises dans des textes du XIX[e] siècle comme mathématicien ayant joué un rôle dans l'histoire de la théorie des nombres et de l'algèbre. Dans cet article, nous étudions les travaux de Poinsot dans ces deux domaines à partir de ses publications et d'un manuscrit sur la théorie des permutations et nous essayons de montrer en quoi un examen du travail de Poinsot peut éclairer la période séparant les *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss de l'œuvre de Galois.

Abstract (Louis Poinsot and theory of order : A missing link between Gauss and Galois ?)

The mathematician Louis Poinsot is principally known today for his contributions to mechanics and Geometry. In texts from the nineteenth century, however, he is frequently mentioned for his influence in the development of number theory and algebra. In this paper, we study Poinsot's work in these two domains through his publications and a manuscript of his on the theory of permutations. We then discuss how such a study may help to understand the transition from Gauss's *Disquisitiones Arithmeticae* to Galois's work.

Texte reçu le 22 octobre 2010, révisé le 7 mars 2011, accepté le 9 mars 2011.

J. Boucard, Institut mathématique de Jussieu.
Courrier électronique : `jenny.boucard@gmail.com`

Classification mathématique par sujets (2010) : 01A55.

Mots clefs : Poinsot, Gauss, Galois, *Disquisitiones Arithmeticae*, histoire de la théorie des nombres, histoire de l'algèbre, cyclotomie, racine primitive, congruence, permutations, polygone, théorie de l'ordre.

Key words and phrases. — Poinsot, Gauss, Galois, *Disquisitiones Arithmeticae*, history of number theory, history of algebra, cyclotomy, congruence, permutations, polygon, theory of order.

INTRODUCTION

En 1801 paraît un ouvrage de théorie des nombres écrit par un jeune mathématicien de 24 ans : ce sont les *Disquisitiones Arithmeticae* de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) qui vont permettre à cette partie des mathématiques d'être considérée comme une discipline à part entière[1]. Au XIXe siècle, des mathématiciens — comme Augustin Louis Cauchy (1789–1857), Carl Gustav Jakob Jacobi (1804–1851) ou encore Johann Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805–1859) — fondent leurs travaux sur une des sept sections[2] des *Disquisitiones Arithmeticae* pour approfondir les théories des formes et des résidus quadratiques, des équations algébriques, voire des fonctions elliptiques, à partir d'outils de théorie des nombres, mais également d'algèbre et d'analyse.

L'objectif de cet article est d'analyser les travaux en théorie des nombres et en algèbre d'un de ces mathématiciens : Louis Poinsot (1777 - 1859). Ce savant[3] occupe plusieurs fonctions au sein de la communauté scientifique française au début du XIXe siècle : professeur à l'École polytechnique et

[1] On pourra se reporter à [Neumann 1979–1980], [Neumann 2005] et [Goldstein et al. 2007] pour comprendre les conséquences de cet ouvrage sur la théorie des nombres et ses liens avec les autres domaines des mathématiques ainsi que l'influence qu'il a eue dans différentes communautés mathématiques.

[2] Les quatre premières sections des *Disquisitiones Arithmeticae* traitent des congruences du premier et du second degré, avec notamment une étude sur les résidus quadratiques. La section V est une théorie des formes quadratiques. Gauss présente des tests de primalité ainsi que des méthodes pour décomposer des fractions et pour résoudre les congruences de la forme $x^2 \equiv A$ modulo un nombre entier m dans la section VI. Dans la section VII, qui a grandement participé à la diffusion rapide du traité, Gauss obtient les conditions de constructibilité du polygone régulier à n côtés à la règle et au compas et donne une méthode générale pour la résolution par radicaux des équations binômes, qui est détaillée à partir de la page 55. Gauss prévoyait également d'ajouter une huitième section traitant des congruences d'ordre supérieur à 2, mais celle-ci n'a pas été publiée par manque de temps et de place. Néanmoins, Gauss s'y réfère régulièrement dans ses recherches.

[3] Il existe très peu d'informations sur la vie de Poinsot, que ce soit dans les archives ou dans les correspondances. Joseph Bertrand (1822–1900) nous livre quelques anecdotes de la vie de Poinsot dans un éloge historique [Bertrand 1890] mais il est difficile d'en tirer des conclusions totalement fiables.

inspecteur général de l'Université dès 1809, puis Inspecteur des études[4] en 1815, élu à l'Institut en 1813 dans la classe des mathématiques à la mort de Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), collaborateur au *Bulletin de Férussac* à partir de 1824. Dans ses publications, peu nombreuses[5], Poinsot aborde essentiellement la mécanique, la géométrie de situation et la théorie des nombres. C'est surtout pour les deux premières qu'il est très connu : ses *Éléments de statique* connaîtront douze éditions par exemple[6] ; son premier mémoire de géométrie, publié en 1809, sur la théorie des polygones et des polyèdres, reçoit également des éloges, et est notamment repris par Cauchy.

Pourquoi étudier les travaux de Poinsot en algèbre et théorie des nombres ? Il semble, à première vue, faire pâle figure devant les Gauss, Cauchy, ou encore Niels Henrik Abel (1802–1829) que l'on retrouve dans toutes les histoires des mathématiques. Au cours de nos recherches, nous avons rencontré plusieurs références à ce mathématicien qui laissent à penser que ses travaux en algèbre et théorie des nombres ne sont pourtant pas passés inaperçus au XIXe siècle. Par exemple, en 1843, Joseph Liouville (1809–1882) fait référence à l'analyse faite par Poinsot en 1808 du *Traité*

4 Voir [Caplat 1986, p. 557]. Il sera mis à la retraite le 22 septembre 1824 en tant qu'inspecteur général à l'avènement de Charles X. En 1840, il intégrera le Conseil royal de l'Université, puis sera chargé de la préparation de la réforme des études scientifiques en 1845, par le ministre Salvandy.

5 Dans [Crosland 1992 (2002, p. 206], l'auteur commente ce fait en même temps que l'élection de Poinsot à l'Académie en remplacement de Lagrange en 1813 : « Poinsot lived on until 1859, proving to be one of the least productive membres of the Academy in the 1820s, 30s, 40s and 50s ». À côté de ses publications, la Bibliothèque de l'Institut de France possède 18 portefeuilles contenant des manuscrits de Poinsot. On y trouve des brouillons et textes de Poinsot relatifs à la mécanique, à l'enseignement, à l'algèbre et à la théorie des nombres. Dans la partie concernant la théorie des nombres, beaucoup de feuillets sont des réflexions sur la théorie des équations et des congruences ainsi que des recherches sur le dernier théorème de Fermat. Nous étudierons d'ailleurs dans cet article un mémoire sur la théorie des permutations trouvé dans ces manuscrits, mais qui n'a jamais été publié.

6 La thèse de Patrice Bailhache est d'ailleurs une analyse de certains travaux de Poinsot en mécanique et statique. Voir [Poinsot & Bailhache 1975].

des équations numériques de tous les degrés de Lagrange dans le cadre d'un conflit avec Guillaume Libri (1803–1869)[7] :

> Pour m'épargner la rédaction que j'aurais d'ailleurs beaucoup moins bien faite, je viens de copier le passage de la préface de M. Poinsot, publiée dès 1808 dans le *Magasin encyclopédique.* M. Poinsot avait spécialement en vue les équations binômes, mais le raisonnement est général, et, pour qui comprend bien cette théorie, il devait l'être. Aussi, c'est le cas de dire que la démonstration du théorème se trouvait d'*avance* dans l'article de M. Poinsot.[8]

On retrouve également d'autres références à Poinsot jusqu'à la fin du XIXᵉ siècle. Dans son *Report on the theory of numbers,* Smith inclut Poinsot dans une liste des quelques savants ayant développé le domaine de la théorie des nombres à partir de l'étude de l'ouvrage de Gauss :

---

7 Bruno Belhoste et Jesper Lützen détaillent les relations *détestables* entre Liouville et Libri — et en particulier le conflit dont il est question ici — dans [Belhoste & Lützen 1984]. Ce n'était pas le premier heurt entre les deux hommes puisque dès 1838, Liouville a dénoncé à l'Académie des erreurs importantes contenues dans un travail de Libri. Dans le cas présent, le litige s'est produit quelques semaines après l'élection de Libri au Collège de France — élection dont il était finalement le seul candidat après les démissions de Cauchy et Liouville. Le 14 août 1843, Liouville soumet à l'Académie un rapport sur un mémoire de Charles Hermite (1822–1901) relatif à la division des fonctions abéliennes. Hermite y développe une méthode analogue à celle utilisée par Abel en 1827 pour déterminer la division des intégrales elliptiques. À la fin de l'exposé, Libri prend la parole pour affirmer que c'est lui qui a démontré pour la première fois la division en parties égales de la lemniscate, et donc également résolu les équations relatives aux fonctions elliptiques. Une semaine plus tard, Liouville répond aux réclamations de Libri. Ce dernier base sa requête sur un théorème qu'il a énoncé sans démonstration devant l'Académie en 1825 — mais qui n'a été publié qu'en 1833 — et qu'il a développé en 1830 seulement. On trouvera les détails de l'argumentation de Liouville dans les *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* de l'année 1843 (tome 17, pages 327–334). Liouville formule correctement le résultat en question ainsi : « Quand les racines d'une équation algébrique peuvent être *toutes* rangées en cercle de telle manière que chacune d'elles se déduise de la précédente et engendre la suivante par une seule et même opération rationnelle, cette équation est nécessairement résoluble à l'aide de radicaux. », résultat dont il paraphrase ensuite la démonstration donnée par Poinsot en 1808. Toujours dans le cadre de ce conflit, Liouville annonce également son intention de publier les écrits d'Évariste Galois (1811–1832) lors de la séance du 4 septembre 1843. Pour une étude du contexte de cette publication, voir [Ehrhardt 2010].

8 *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences,* tome 17, année 1843, p. 332.

> The arithmetical memoirs of Gauss himself, subsequent to the publication of the 'Disquisitiones Arithmeticae' ; those of Cauchy, Jacobi, Lejeune Dirichlet, Eisenstein, Poinsot, and, among still living mathematicians, of MM. Kummer, Kronecker, and Hermite, have served to simplify as well as to extend the science. [Smith 1859–1865, p. 38]

Poinsot est aussi cité dans *Les mathématiques en Portugal*[9], de Rodolphe Guimarães, à l'occasion d'un aperçu des sciences mathématiques de la première moitié du XIX^e siècle :

> Nous sommes, donc, à la moitié du XIX^e siècle : avec une théorie des nombres, dûe à Gauss, les groupant en classes moyennant les équations de congruence, qui s'élève jusqu'à la notion de nombre complexe ; avec les élégantes investigations de Poinsot, qui font dépendre l'Arithmétique et l'Algèbre de l'ordre et de la combinaison ; avec une Algèbre qui, en délaissant les fâcheuses et peu fécondes élucubrations que l'on devait appliquer dans la pratique, se renferme avec les théorèmes de Sturm et Cauchy, pour suivre une autre direction, soumise au concept de groupe des *substitutions* [...] [Guimarães 1900, p. 7]

Ces deux auteurs prêtent donc à Poinsot une place surprenante dans l'évolution de l'algèbre et la théorie des nombres au XIX^e siècle. La première citation est issue d'une source secondaire importante pour l'histoire de la théorie des nombres tandis que la seconde vient d'un ouvrage certes beaucoup moins connu, mais qui, à la fin du XIX^e siècle, place Poinsot parmi les quelques mathématiciens marquants de l'évolution de l'arithmétique et de l'algèbre. Nous voulons donc essayer de comprendre pourquoi Poinsot semble être pour certains savants un chaînon non négligeable dans le développement de ces deux domaines.

Il existe cinq publications de Poinsot relatives à l'algèbre et la théorie des nombres :

– un commentaire publié dans le *Moniteur universel* du 21 mars 1807 à l'occasion de la traduction française par Poullet - Delisle des *Disquisitiones Arithméticae* de Gauss ;

---

9 La première édition de cet ouvrage a été publiée en 1900, à l'occasion de l'Exposition Universelle de Paris.