JEAN-MARC FONTAINE

Groupes p-divisibles sur les corps locaux

Astérisque, tome 47-48 (1977)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__47-48__1_0>

Je voudrais remercier le département de mathématiques de Queen's University, Kingston, Ontario, en particulier P. Ribenboim, de m'avoir donné l'occasion d'éclaircir mes idées sur les schémas en groupes finis et plats lors d'un cours que j'y fis à l'automne 1974.

Les résultats annoncés dans [20], [21] et [22] (dont les démonstrations constituent une partie du chapitre III et du § 1 du chapitre IV du présent mémoire, ainsi qu'une partie de [23]) ont été exposés lors d'un cours au Collège de France (Fondation Peccot) au printemps 1975. Les démonstrations étaient différentes car on utilisait au maximum les résultats connus. Je voudrais remercier la fondation Peccot de son hospitalité et les auditeurs de ce cours de leur patience et de leurs interventions.

Je voudrais aussi remercier tous ceux qui m'ont aidé aux différents stades de ce travail. Tout particulièrement P. Berthelot et W. Messing, mais aussi P. Cartier, P. Deligne, L. Illusie, N. Katz, M. Lazard, B. Mazur, M. Raynaud. Et enfin et surtout J.-P. Serre sans lequel ce travail n'aurait jamais vu le jour.

Ces remerciements seraient incomplets si je n'exprimais ici ma reconnaissance à Mme Guttin-Lombard et à Mlle Marchand qui ont réalisé la frappe du manuscrit.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 2

Chapitre I : THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES SCHÉMAS EN GROUPES AFFINES COMMUTATIFS

§ 1. Schémas affines 17
§ 2. Groupes affines 20
§ 3. Anneaux et modules profinis 24
§ 4. Schémas formels 30
§ 5. Groupes formels et dualité de Cartier 35
§ 6. Noyaux et conoyaux 39
§ 7. Groupes étales et connexes 45
§ 8. Espaces tangent et cotangent 52
§ 9. Structure des groupes formels connexes sur un corps 57
§ 10. Cohomologie de Hochschild 62

Chapitre II : COVECTEURS DE WITT

§ 1. Vecteurs et covecteurs de Witt 71
§ 2. Endomorphismes 79
§ 3. Quelques séries formelles 85
§ 4. Le groupe formel des covecteurs 90
§ 5. Relèvement des covecteurs 95
§ 6. Groupe de Cartier et exponentielle d'Artin-Hasse 108

Chapitre III : MODULE DE DIEUDONNÉ

§ 1. Classification des p-groupes formels 125
§ 2. Extension des scalaires 132
§ 3. Module de Dieudonné et espace tangent 138
§ 4. Module de Dieudonné et espace cotangent 143
§ 5. Dualité 151
§ 6. Groupes formels lisses 160

Chapitre IV : GROUPES FORMELS LISSES SUR UN ANNEAU DE VALUATION DISCRÈTE

§ 1. Le cas $e = 1$ 167
§ 2. Le foncteur $M \mapsto M_{A'}$ 187
§ 3. Relèvement des covecteurs (suite) 196
§ 4. Groupes formels lisses sur A' 201
§ 5. Groupes p-divisibles sur A' 220

Chapitre V : COMPLÉMENTS

§ 1. Le module de Tate 225
§ 2. Travaux de Honda 238
§ 3. Théorie de Cartier (courbes typiques) 245

Bibliographie 258

Summary 261

INTRODUCTION

0.1. Soit p un nombre premier, soit k un corps parfait de caractéristique p, soit $A = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k, soit A' l'anneau des entiers d'une extension finie totalement ramifiée du corps des fractions de A et soit e le degré de cette extension.

Le présent mémoire a pour objet

- la classification, à isomorphisme près, des (schémas en) groupes formels commutatifs sur k ;
- la classification, à isomorphisme près, des (schémas en) groupes formels, lisses et de dimension finie, sur A et sur A' si $e \leq p-1$;
- la classification, à isogénie près, des groupes de Barsotti-Tate (ou groupes p-divisibles) sur A'.

0.2. Ce mémoire a été conçu pour pouvoir être lu par les non-spécialistes : il suffit, en principe, de connaître un peu d'algèbre commutative (par exemple celle de Bourbaki) et les rudiments du langage des catégories (par exemple, [40]). On a essayé d'être aussi "élémentaire" que possible. On a systématiquement négligé le point de vue "géométrique" au profit du point de vue "fonctoriel" (et on a escamoté les difficultés d'ordre logique : les "catégories" de foncteurs que l'on considère ne sont de "vraies" catégories qu'à condition de se restreindre à un univers convenable, ce qui est implicitement supposé). Dans cet esprit, donnons, dès maintenant, quelques définitions (nous les reprendrons dans un cadre plus général au chapitre I) : soit B un anneau qui est soit k, soit A, soit A' :

- on appelle B-<u>anneau fini</u> toute B-algèbre associative, commutative et unitaire qui est un B-module de longueur finie ;
- un B-<u>foncteur formel</u> est un foncteur covariant de la catégorie des B-anneaux finis dans celle des ensembles ; on dit que c'est un <u>schéma fini sur</u> B