

Astérisque

RICARDO PÉREZ-MARCO

JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

Germes de feuilletages holomorphes à holonomie prescrite

Astérisque, tome 222 (1994), p. 345-371

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__222__345_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__222__345_0)

© Société mathématique de France, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GERMES DE FEUILLETAGES HOLOMORPHES

À HOLONOMIE PRESCRITE

RICARDO PÉREZ-MARCO*

JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ**

I. INTRODUCTION

Considérons au voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^2$ un germe de champ de vecteurs holomorphe, $X = X_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + X_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ s'annulant en 0. On veut étudier le feuilletage holomorphe singulier $\mathcal{F}$ défini au voisinage de 0 par l'équation différentielle:

$$\begin{cases} \dot{x} = X_1(x, y) \\ \dot{y} = X_2(x, y) \end{cases}$$

Son caractère dépend essentiellement des valeurs propres, notées λ_1 et λ_2 , de la partie linéaire de X en 0.

Par le théorème de A. Seidenberg ([Se]), après un nombre fini d'éclatements on aboutit à des singularités primitives (ou irréductibles) où $\lambda_2 \neq 0$ et λ_1/λ_2 n'est pas un rationnel strictement positif. Pour ces singularités deux situations se présentent:

- **Domaine de Poincaré:** C'est le cas où $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbf{C} - \mathbf{R}_+$. H. Poincaré ([Po]) a montré que l'équation différentielle est *linéarisable* au voisinage de 0, i.e. par

*CNRS, U.R.A. 1169, Université de Paris-Sud, Dépt. de Mathématiques, Bât 425, 91405-Orsay (France).

**Université de Paris-Sud, Dépt. de Mathématiques, Bât. 425, 91405-Orsay (France).

un changement de variables holomorphe le champ X s'écrit $\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y}$. La structure du feuilletage local $\mathcal{F}$ est alors topologiquement et analytiquement déterminée.

• **Domaine de Siegel:** Ce cas correspond à $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbf{R}_-$. On a encore deux cas à distinguer: $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbf{Q}_-$ -c'est le cas *résonant*-et $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbf{R}_- - \mathbf{Q}_-$.

L'étude du cas résonant a été complètement effectuée par J. Martinet et J.-P. Ramis ([M-R1] et [M-R2]) qui ont déterminé tous les invariants holomorphes d'un tel germe de feuilletage.

Dans le cas non résonant, on n'a pas de *résonances* (d'où la terminologie) du type:

$$\lambda_i = q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2,$$

avec $i = 1, 2$ et $q_1, q_2 \in \mathbf{N}^*$.

Ceci permet de montrer facilement que le champ X est formellement linéarisable; cependant ce changement de variables formel peut diverger à cause des problèmes de petits diviseurs. Un théorème remarquable de C.- L. Siegel ([Si1],[Si2]) montre que la linéarisante converge lorsque $\alpha = -\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ satisfait à une condition diophantinne, i.e. il existe $\gamma, \tau > 0$ tels que pour $p/q \in \mathbf{Q}$,

$$|\alpha - p/q| \geq \frac{\gamma}{q^\tau}.$$

Cette condition sur α est de mesure de Lebesgue totale. A. Bruno a amélioré la démonstration de Siegel et obtient le résultat sous une condition arithmétique plus faible: Si $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$ est la suite des réduites de α cette condition s'écrit

$$(B) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < +\infty.$$

Par ailleurs il est connu qu'il existe des valeurs de $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ pour lesquelles la linéarisante peut diverger (Bruno, Ilyashenko, Pyartli). La topologie du feuilletage dans le cas non linéarisable n'est pas comprise, on va voir qu'elle peut être très complexe.

Dans la suite on se placera dans le domaine de Siegel avec $\alpha = -\lambda_2/\lambda_1 > 0$ rationnel ou irrationnel. Dans ce cadre il existe deux variétés analytiques invariantes par le champ de vecteurs X qui passent par l'origine (Briot-Bouquet [Bri], H. Dulac [Du]). Plus précisément, après un changement de variables holomorphe, le champ X s'écrit

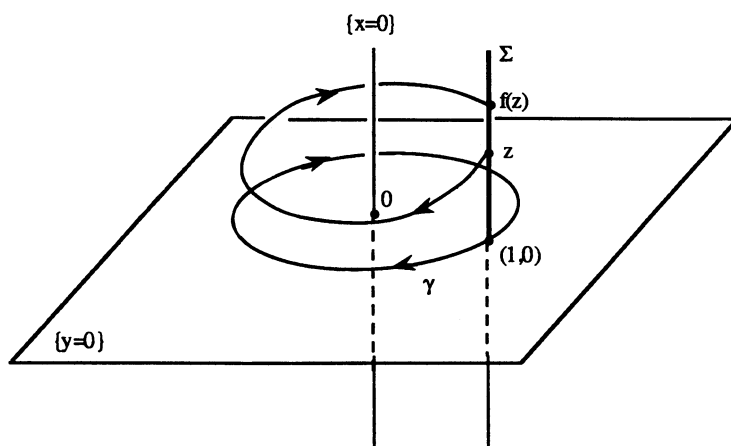
$$X = \lambda_1 x(1 + \dots) \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y(1 + \dots) \frac{\partial}{\partial y},$$

donc les axes $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$ sont des variétés invariantes de X (une démonstration se trouve dans [M-M] appendice II). On peut alors considérer l'*holonomie* de la variété invariante $\mathcal{F}_0 = \{(x, 0); x \neq 0\}$ suivant le lacet $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^2$, $\gamma(t) = (e^{-2\pi i t}, 0)$ (quitte à conjuguer par une homothétie). Pour cela on choisit une transversale holomorphe Σ en $(1, 0)$ à $\mathcal{F}_0$ (par exemple $\{x = 1\}$), et on relève γ aux feuilles voisines de $\mathcal{F}_0$. L'application de retour sur Σ définit (en considérant une carte sur Σ) un germe de difféomorphisme holomorphe de $(\mathbf{C}, 0)$, $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$, et on montre facilement que $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$ ([M-M] p. 480 pour plus de détails).

Les choix du lacet γ dans sa classe d'homotopie dans $\mathcal{F}_0$, de la transversale Σ et de la carte sur Σ n'affectent pas la classe de conjugaison de f . De même, si on transforme le feuilletage par un germe de difféomorphisme holomorphe de $(\mathbf{C}^2, 0)$, l'holonomie obtenue pour la variété invariante correspondante est encore dans la même classe que f .

En résumé, on obtient ainsi une application, notée Hol_α , définie sur l'ensemble des classes de conjugaison de germes de feuilletages holomorphes singuliers de $(\mathbf{C}^2, 0)$ dans le domaine de Siegel avec $\alpha = -\lambda_2/\lambda_1 > 0$ à valeurs dans l'ensemble des classes de conjugaison des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbf{C}, 0)$ de partie linéaire $z \mapsto e^{2\pi i \alpha} z$.

On démontrera ici que cette application est bijective. En d'autres termes, la classification analytique de tels germes de feuilletages singuliers est la même que celle des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbf{C}, 0)$.



J.-F. Mattei et R. Moussu ([M-M]) ont montré que $\mathcal{F}$ est linéarisable si et seulement si f est *linéarisable* (i.e. conjugué par un difféomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$ à sa partie linéaire), et, plus généralement, que les holonomies de deux feuilletages sont conjuguées si et seulement s'ils sont eux-mêmes conjugués. La démonstration consiste à prolonger la conjugaison, définie sur les transversales, le long des feuilles. Ceci démontre l'injectivité de Hol_α pour toute valeur $\alpha > 0$.

La bijectivité est immédiate lorsque $\alpha \in \mathcal{B}$. En effet, les techniques de Siegel s'appliquent aussi pour les germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$ pour démontrer la linéarisabilité lorsque $\alpha \in \mathcal{B}$ ([Si1], [Br]). Dans ce cas, les deux ensembles de classes de conjugaison sont réduits à un seul élément. Le cas $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ a été résolu par J. Martinet et J.-P. Ramis ([M-R]) qui, à partir de la classification des germes obtenue par J. Ecalle et S.-M. Voronin (pour $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$, [Ec], [Vo]) ont montré qu'on pouvait réaliser tout germe holomorphe $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$ comme holonomie des feuilletages considérés. Ceci prouve la surjectivité de Hol_α lorsque $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$.

On se propose de démontrer la surjectivité dans le cas général $\alpha > 0$: