

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

NICOLAS BURQ

Contrôle de l'équation des plaques en présence d'obstacles strictement convexes

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 55 (1993)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1993_2_55_3_0

© Mémoires de la S. M. F., 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Société Mathématique de France
Mémoire 55
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 121, 1993, fascicule 4.

Contrôle de l'équation des plaques en présence d'obstacles strictement convexes

Nicolas Burq

Résumé. On étudie la contrôlabilité de l'équation des plaques avec un contrôle portant sur la trace du laplacien sur la frontière extérieure d'un domaine contenant des obstacles strictement convexes. Sous une hypothèse d'hyperbolicité forte de la transformation de billard, on montre qu'en tout temps arbitrairement petit, on peut contrôler toutes les données initiales $(u|_{t=0}, \partial_t u|_{t=0}) \in H_0^{1+\epsilon} \times H^{-1+\epsilon}$ ($\epsilon > 0$).

Abstract. Assuming that the hamiltonian flow is "strongly hyperbolic", we study the exact controllability of the plates equation in a domain containing strictly convex obstacles, with a control acting only on the trace of the laplacian on the exterior boundary of the domain. We show that for any time $T > 0$, any initial data $(u|_{t=0}, \partial_t u|_{t=0}) \in H_0^{1+\epsilon} \times H^{-1+\epsilon}$ ($\epsilon > 0$) can be controlled in time T .

Classification A.M.S. (1985). 35A15, 35B37, 35J10, 35P25, 35S15, 49E15.

Texte reçu le 20 juin 1992

Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques (CMAT), U.R.A. 169

91128 Palaiseau Cedex, France.

Table des matières.

0	Introduction, énoncé du résultat	5
	0.1 Hypothèses	
	0.2 Énoncé du théorème	
1	Réduction du problème	9
	1.1 Définition des opérateurs d'évolution	
	1.2 Le théorème 1.2 implique le théorème 0.1	
	1.2.1 Estimation elliptique, relèvement et propagation	
	1.2.2 Décomposition de Littlewood Paley	
	1.2.3 Conclusion	
	1.3 Le théorème 1.1 implique le théorème 1.2	
	1.3.1 Commutations	
	1.3.2 Propagation	
	1.3.3 Conclusion	
2	Construction des troncatures micro-locales	33
	2.1 Définitions, propriétés géométriques	
	2.2 Construction de la troncature r	
	2.3 Quelques propriétés des troncatures	
3	Quelques résultats sur les phases et les transformations de billard	41
	3.1 Construction des phases réfléchies	
	3.2 Comportement exponentiel du billard	
	3.2.1 Le billard en variables d'espace	
	3.2.2 Le billard en variables de directions	
	3.3 Quelques estimations C^∞	
	3.4 Comportement asymptotique des phases	
	3.5 Comportement asymptotique des courbures gaussiennes	
4	Construction asymptotique le long d'une trajectoire captive	79
	4.1 Construction dans l'espace libre	
	4.2 Rebond d'une solution	
5	Décroissance des solutions le long d'une trajectoire captive	97
	5.1 Régularité des transformations géométriques	
	5.2 Décroissance asymptotique des solutions	
6	Démonstration du théorème 1.1	105
A	Calcul h-pseudodifférentiel	109
B	Front d'onde semi-classique et propagation	119
	Bibliographie	125

Introduction, énoncé du résultat.

Le problème du contrôle pour l'équation des plaques sur un ouvert borné de \mathbb{R}^n , Ω , a été étudié par J.L. Lions [Li]. En utilisant sa méthode H.U.M. et des techniques de multiplicateurs, J.L.Lions démontre des résultats de contrôlabilité exacte en temps fini (dépendant de la géométrie de l'ouvert), si le contrôle porte sur une partie Γ_0 du bord Γ de l'ouvert Ω définie de la manière suivante:

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, pour tout point $x \in \Gamma$ on note $n(x)$ la normale sortante au bord en x . On définit Γ_0 par

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma; n(x) \cdot (x - x_0) > 0\}.$$

Ces résultats ont été améliorés par E.Zuazua [Z] qui a démontré qu'on pouvait prendre un temps de contrôle arbitrairement petit (ce phénomène est dû au caractère non hyperbolique de l'équation des plaques).

A la suite des travaux de C.Bardos, G.Lebeau et J. Rauch [BLR] sur le contrôle de l'équation des ondes, G. Lebeau [Le] a appliqué les techniques d'analyse micro-locale à l'équation des plaques et obtenu des résultats de contrôlabilité exacte en temps arbitrairement petit avec des hypothèses sur Γ_0 plus naturelles que celles de J.L. Lions. Plus précisément, on dira que Γ_0 contrôle géométriquement Ω en temps T_0 si tout rayon partant d'un point $x_0 \in \Omega$ dans toute direction $\xi \in \mathbb{R}^n$, parcouru à vitesse 1, se réfléchissant sur le bord de Ω selon les lois de l'optique géométrique, atteint Γ_0 en temps inférieur à T_0 (pour une définition rigoureuse nous renvoyons à [BLR]). Le résultat de G.Lebeau dit alors que si Γ_0 contrôle géométriquement Ω en temps fini, on peut contrôler l'équation des plaques en temps arbitrairement petit avec un contrôle portant agissant sur Γ_0 .

Il faut cependant noter que contrairement au cas de l'équation des ondes où le critère de contrôlabilité géométrique fournit des conditions nécessaires et suffisantes pour la contrôlabilité exacte, on n'a, pour l'équation des plaques, qu'une condition suffisante. En effet, les résultats de A.Haroux [H] sur le contrôle semi-interne de l'équation des plaques dans un rectangle de \mathbb{R}^2 où on autorise le contrôle à agir dans une bande parallèle à un des cotés, montrent que l'hypothèse de contrôlabilité géométrique n'est pas nécessaire. Ces derniers résultats ont ensuite été étendus par S.Jaffard [J] au cas du contrôle interne d'un rectangle c'est à dire au cas où on autorise le contrôle à agir seulement sur un ouvert quelconque du rectangle. Cependant ces résultats dont la démonstration fait appel à des techniques d'analyse harmoniques ne semblent pas généralisables à des situations géométriques plus complexes.

Nous allons nous intéresser au contrôle de l'équation des plaques dans un cadre géométrique où la partie du bord sur laquelle nous contrôlons ne contrôle plus géométriquement l'ouvert. Nous nous placerons donc dans la situation géométrique suivante:

Hypothèses

Soit $\widehat{\Omega}$ un ouvert de \mathbf{R}^3 , connexe, borné, à frontière analytique. Soient $\theta_1, \dots, \theta_N$, N fermés strictement convexes de $\widehat{\Omega}$, à frontière C^∞ tels que l'enveloppe convexe $\text{conv}(\bigcup_i \theta_i)$, de l'union des θ_i soit incluse dans $\widehat{\Omega}$, et vérifiant de plus les hypothèses suivantes introduites par M. Ikawa [I3]:

$$H_1) \forall 1 \leq j_1, j_2, j_3 \leq N, j_i \neq j_k \Rightarrow \text{conv}(\theta_{j_1} \cup \theta_{j_2}) \cap \theta_{j_3} = \emptyset.$$

$$H_2) \exists \alpha > 0; \sum_{\gamma \text{ primitif}} \lambda_\gamma d_\gamma e^{\alpha d_\gamma} < \infty,$$

où $\lambda_\gamma = \sqrt{\beta_\gamma \beta'_\gamma}$; β_γ et β'_γ sont les deux valeurs propres de module plus petit que 1 (strictement car les obstacles θ_i sont supposés strictement convexes) de l'application de Poincaré (billard) associée à la trajectoire captive γ ; la sommation n'ayant lieu que sur les trajectoires primitives (voir définition au §6) et pour toute trajectoire captive γ ,

$$\gamma = \bigcup_{i=0}^n [x_i, x_{i+1}], x_{n+1} = x_0,$$

$$d_\gamma = \sum_{i=0}^n \|x_i - x_{i+1}\|.$$

Remarque 1 : l'hypothèse H_1 est essentiellement technique.

Remarque 2 : l'hypothèse H_2 est une hypothèse sur la structure fortement hyperbolique de l'application de billard et est par exemple vérifiée si les θ_j sont des boules de rayons r , éloignées les unes des autres d'une distance $d > rN$.

Soit $\Omega = \widehat{\Omega} \setminus \bigcup_i \theta_i$.

Ce cadre géométrique a été étudié par C.Gérard [G] (dans le cas de deux obstacles) et M.Ikawa [I1,2,3], pour le calcul de la localisation des pôles de la matrice de diffusion pour l'équation des ondes à l'extérieur des obstacles. Le résultat que nous obtenons semblerait indiquer l'existence d'un lien qui reste à définir précisément, entre cette localisation et la contrôlabilité exacte.

Enoncé du théorème

Sous ces hypothèses, nous allons démontrer le théorème de contrôlabilité exacte suivant :

Théorème 0.1.— *Pour tout temps $T_0 > 0$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, pour toutes conditions initiales $(u_0, u_1) \in H^{1+\varepsilon}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H^{-1+\varepsilon}(\Omega)$, il existe un contrôle $g \in L^2(]0, T_0[\times \partial\widehat{\Omega})$ tel que la solution du problème d'évolution :*

$$(0.1) \quad \begin{aligned} (\partial_t^2 + \Delta^2)u &= 0 \quad \text{dans } \mathbf{R}_t \times \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \\ \Delta u|_{\partial\Omega} &= g \times 1_{]0, T_0[\times \partial\widehat{\Omega}}, \\ u|_{t=0} &= u_0, \\ \partial_t u|_{t=0} &= u_1, \end{aligned}$$

vérifie $u \equiv 0$ pour tout $t \geq T_0$.

Remarque 3 : ce résultat est légèrement plus faible que celui de G. Lebeau [Le], la perte sur la régularité des données initiales étant due au fait que $\partial\widehat{\Omega}$ ne contrôle plus géométriquement Ω en temps T_0 fini.

Remarque 4 : les hypothèses H_1 et H_2 sont évidemment vérifiées si on n'a que deux obstacles.

Remarque 5 : la dimension $n = 3$ ne jouant aucun rôle particulier, nos résultats semblent généralisables au cas n quelconque.

Le plan de l'article est le suivant : dans le §1 nous réduisons le problème à un problème de décroissance exponentielle de l'énergie, pour la démonstration duquel nous adapterons une stratégie inspirée de celle de M. Ikawa [I3] consistant à construire une paramétrix de la solution de l'équation de Schrödinger. Le §2 est consacré à la construction des troncatures micro-locales dont nous aurons besoin par la suite. Dans le §3 nous donnons des résultats sur le comportement des rayons captifs. Ces résultats sont pour la plupart dus à M. Ikawa [I1], [I2], [I3]. Dans le §4 nous construisons la paramétrix dont nous avons parlé plus haut. Dans le §5 nous estimons la décroissance de notre paramétrix. Le §6 termine enfin la démonstration de notre théorème. Dans l'appendice A nous rappelons quelques résultats sur le calcul h-pseudo-différentiel et dans l'appendice B nous étudions la propagation des singularités h^s dans l'esprit de Lebeau [L].

Ce travail a constitué une thèse de l'Université de Paris Sud (Orsay). Je remercie chaleureusement G. Lebeau qui a dirigé cette thèse pour ses nombreuses indications et pour la constante disponibilité dont il a fait preuve.

1. Réduction du problème.

Nous allons réduire la démonstration du théorème 0.1 à la construction d'une paramétrix de l'équation de Schrödinger avec conditions au bord de Dirichlet, vérifiant certaines propriétés de décroissance (analogues à la décroissance exponentielle démontrée par M. Ikawa pour les solutions de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^N \theta_i$).

On commence par introduire quelques notations. Soit $(e_\nu, \lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ la base orthonormée de $L^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres pour le Laplacien $-\Delta_{\text{Dirichlet}}$ associés aux valeurs propres λ_ν .

Soient $\rho > 1, \alpha < \rho^{-1}$. On note

$$F_{k,\rho,\alpha} = \{\nu ; \rho^k \alpha \leq \sqrt{\lambda_\nu} < \rho^k \alpha^{-1}\}$$

et

$$E_{k,\rho,\alpha} = \{u \in L^2(\Omega) ; u = \sum_{\nu \in F_{k,\rho,\alpha}} u_\nu e_\nu\}.$$

1.1 Définition des opérateurs d'évolution.

Notre point de départ est la constatation suivante :

Soit u solution de

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (ih\partial_t - h^2\Delta)u &= 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \\ u|_{t=0} &= u_0. \end{aligned}$$

Nous poserons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $h_k = \rho^{-k}$ et nous noterons $(1.1)_{h=h_k}$ le système (1.1) où on a fixé le coefficient $h = h_k$.

Soit $T_0 > 0$ et soit $\psi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi|_{t \leq T_0/3} \equiv 0$, $\psi|_{t \geq 2T_0/3} \equiv 1$, $\psi(t) \in [0, 1]$ et $\psi'(t)$ positive pour tout t .

Alors la fonction $v = \psi(t)u(x, t)$ vérifie

$$(1.2) \quad \begin{aligned} (ih\partial_t - h^2\Delta)v &= ih\psi'(t)u, \\ v|_{t \leq 0} &= 0, \\ v|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Soit $A(h) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ un opérateur dépendant de h comme paramètre, uniformément borné en h pour la norme L^2 .

L'isométrie (pour la norme L^2) $I(h) : u_0 \rightarrow u|_{t=T_0}$ peut alors se décomposer en somme de deux termes $I_1(h)$ et $I_2(h)$,

avec $I_1(h)$ défini par

$$(1.3) \quad \begin{aligned} I_1(h) : \quad H_0^1(\Omega) &\rightarrow H_0^1(\Omega) \\ u_0 &\rightarrow v|_{t=T_0} \end{aligned}$$

avec v défini par

$$(1.4) \quad \begin{aligned} (ih\partial_t - h^2\Delta)v &= ih\psi'(t)A(h)(u), \\ v|_{t \leq 0} &= 0, \\ v|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

et I_2 défini de la même façon en remplaçant A par $Id - A$.

On a alors

$$I_1 u_0(x) = \int_0^{T_0} \psi'(s) e^{-ih(T_0-s)\Delta_D} (A(h)[u(s)]) ds,$$

donc comme ψ' est positive

$$\|I_1(h)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|A(h)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nous allons montrer que le théorème suivant implique le théorème 0.1 :

Théorème 1.1. — *Il existe des réels $\rho > 1$, $\alpha' < \alpha < \rho^{-1}$ et $T_1 > 0$ et une fonction $r \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^3)$, $0 \leq r \leq 1$, tangentielle près du bord de Ω (au sens de l'appendice A), nulle au voisinage du bord extérieur de Ω ($\partial\widehat{\Omega}$), tels que si $x \in \overline{\Omega}$, $r(x, \xi) \neq 1$ et $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$, le rayon généralisé issu de (x, ξ) parcouru à la vitesse $|\xi|$ rencontre $\partial\widehat{\Omega}$ en temps $t \in [-T_1, T_1]$ et tels qu'il existe une fonction $q \in C_0^\infty(T^*\Omega)$, $0 \leq q \leq 1$, vérifiant:*

$$\begin{aligned} q(x, \xi) &\equiv 0 \quad \forall |\xi| \notin [\alpha', \alpha'^{-1}], \\ q(x, \xi) &\equiv 1 \quad \text{si } x \in X \text{ et } |\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}], \end{aligned}$$

avec X ouvert et $X \subset\subset T^*\Omega$, X vérifiant de plus :

il existe $T_0 > 0$ et $M \in \mathbf{N}^*$ tels que tout rayon généralisé issu de (x, ξ) , $x \in \Omega$, $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$ parcouru à la vitesse $|\xi|$ restera dans X pendant un intervalle de temps de la forme $[nT_0, (n+1)T_0]$; $0 \leq n \leq M-1$ ou rencontrera le bord extérieur $\partial\widehat{\Omega}$ de l'ouvert Ω et restera dans le complémentaire du support de r pendant un intervalle de temps de la forme $[nT_0, (n+1)T_0]$; $0 \leq n \leq M-1$. L'opérateur I_1 associé à $Op(r)$ par la relation (1.3) vérifiant de plus:

(1.5)

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0; \exists A \in \mathbf{N}^*, \exists \sigma > 0, \exists C > 0; \forall s \in [-\varepsilon; \varepsilon], \\ \exists k_0 > 0, \forall k \geq k_0, \forall u_k \in E_{k, \rho, \alpha}, \\ \|(I_1|_{h=h_k})^{A_k} I_s Op(q)_{h=h_k} u_k\|_{L^2} \leq C h_k^\sigma \|u_k\|_{L^2}, \end{aligned}$$

où on note I_s l'opérateur $u_0 \rightarrow u|_{t=s} = I_s u_0$, où u est la solution de (1.1) $_{h=h_k}$ associée à la donnée initiale u_0 et $Op(q)$ et $Op(r)$ les opérateurs h -pseudo-différentiels associés aux symboles r et q comme à l'appendice A.

Remarque: l'opérateur $Op(r)$ est un opérateur de troncature qui permet d'éliminer à chaque étape la partie micro-locale de l'énergie de la solution de l'équation de Schrödinger contrôlée par le bord extérieur de l'ouvert.

L'opérateur $Op(q)$ est essentiellement technique; il permet de localiser la fonction u en fréquence dans une zone $|\xi| \in [\alpha, \alpha^{-1}]$ et de se ramener à une donnée initiale à support compact dans Ω .

Nous avons dû utiliser des troncatures régulières du type de (1.4) plutôt que tronquer brutalement à l'instant $t = T_0$ ce qui correspondrait à remplacer $\psi'(t)$ par $\delta_{t=T_0}$, afin de pouvoir appliquer par la suite des résultats de propagation des singularités.

Pour réduire la démonstration du théorème 0.1 à celle du théorème 1.1, nous allons procéder en deux étapes.

la première étape consistera à montrer que le théorème suivant implique le théorème 0.1

Théorème 1.2.— *Il existe des réels $\rho > 1$, $\alpha' < \alpha < \rho^{-1}$ et $T_1 > 0$ et une fonction r vérifiant les hypothèses du théorème 1.1, tels qu'il existe α'' , $\alpha < \alpha'' < \rho^{-1}$ et un entier k_0 tels que pour tous $\nu > 0$ il existe $C > 0$ tel*