

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

VINCENT MAILLOT

Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 80 (2000)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_2000_2_80__R3_0

© Mémoires de la S. M. F., 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE D'ARAKELOV DES VARIÉTÉS TORIQUES ET FIBRÉS EN DROITES INTÉGRABLES

Vincent Maillot

Résumé. — Notre but, dans ce mémoire, est double. Nous étendons tout d'abord la théorie de l'intersection arithmétique de Gillet-Soulé afin qu'elle englobe les fibrés en droites intégrables. Pour ce faire, nous utilisons de manière essentielle une théorie du produit pour les courants positifs due à Bedford-Taylor et Demailly.

Dans un second temps, nous appliquons cette construction aux variétés toriques projectives lisses. Dans ce cadre, nous montrons entre autres choses que les hauteurs canoniques des hypersurfaces sont reliées à leur mesure de Mahler, et à partir de l'ensemble des résultats obtenus nous établissons un analogue arithmétique du théorème de Bernstein-Koushnirenko.

Abstract (Arakelov geometry of toric varieties and integrable line bundles)

Our aim in this paper is twofold. Firstly, we extend the Gillet-Soulé arithmetic intersection theory, so that it encompasses integrable line bundles. In so doing, we use as an essential tool a product theory for positive currents developed by Bedford-Taylor and Demailly.

Secondly, we apply this construction to smooth projective toric varieties. In this framework, we prove among other things that canonical heights of hypersurfaces are related to their Mahler measure. As a consequence of our results, we prove an arithmetic analogue of the Bernstein-Kushnirenko theorem.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Variétés toriques sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$	7
2.1. Cônes et éventails	7
2.2. Construction des variétés toriques sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$	9
2.3. Diviseurs invariants sur $\mathbb{P}(\Delta)$	14
2.4. Variété torique et fibré en droites associé à un polytope	18
2.5. Groupe de Picard et anneau de Chow d'une variété torique projective lisse	20
3. Variétés toriques complexes	25
3.1. Variété à coin associée à une variété torique	25
3.2. Un recouvrement canonique de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$	27
3.3. Métriques canoniques sur les faisceaux inversibles équivariants au-dessus de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$	30
3.4. Métriques canoniques sur les fibrés en droites sur $\mathbb{P}(\Delta)$.	37
4. Produits de courants	39
4.1. Motivation	39
4.2. Théorie de Bedford-Taylor-Demailly	39
4.3. Formes différentielles généralisées	43
4.4. Convergence au sens de Bedford-Taylor et image inverse	47
4.5. Métriques admissibles	54
4.6. Un théorème d'approximation globale	56
4.7. Fibrés en droites intégrables	59
5. Groupes de Chow arithmétiques généralisés	63
5.1. Théorie classique de Gillet-Soulé	63
5.2. Fibrés en droites intégrables sur une variété arithmétique	65
5.3. Groupes de Chow arithmétiques généralisés	67
5.4. L'accouplement $\widehat{CH}_{\text{int}}^p(X) \otimes \widehat{CH}_{\text{int}}^q(X) \rightarrow \widehat{CH}_{\text{int}}^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}}$	79
5.5. Degré arithmétique et hauteurs	84

6. Courants de Chern canoniques sur les variétés toriques	89
6.1. Préliminaires	89
6.2. Calcul de $c_1(\overline{L})$	90
6.3. Calcul de $c_1(\overline{L}_1) \cdots c_1(\overline{L}_q)$	95
6.4. Diviseurs élémentaires	102
7. Géométrie d'Arakelov des variétés toriques	105
7.1. Annulation des multihauteurs	105
7.2. Hauteurs canoniques des hypersurfaces de $\mathbb{P}(\Delta)$	106
7.3. Un exemple.	107
7.4. L'anneau de Chow arithmétique généralisé d'une variété torique	109
8. Un théorème de Bernstein-Koushnirenko arithmétique	111
8.1. A propos d'une constante associée à un polytope convexe	111
8.2. Un théorème de Bernstein-Koushnirenko arithmétique	116
Bibliographie	123
Index des notations	127

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Grâce à Demazure [Dema], on sait associer à tout éventail Δ de $\mathbb{Z}^d$ un schéma $\pi : \mathbb{P}(\Delta) \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ que l'on appelle *variété torique* associée à Δ . On trouve dans la littérature (cf. [Da], [Oda] et [Fu2] pour des références précises) une description explicite de la variété $\mathbb{P}(\Delta)$ sur $\mathbb{C}$ en terme des propriétés combinatoires de Δ . Revenant au point de vue originel de Demazure, nous montrons que cette description s'étend sans difficulté à la situation sur $\mathbb{Z}$. En particulier, on dispose lorsque $\mathbb{P}(\Delta)$ est projective et lisse, d'une description agréable basée sur un théorème de Jurkiewicz et Danilov, de l'anneau de Chow $CH^*(\mathbb{P}(\Delta))$ en terme de générateurs et relations (théorème 2.5.7). Plus précisément, nous montrons que $CH^*(\mathbb{P}(\Delta))$ est engendré en tant qu'anneau par la première classe de Chern $c_1(L) \in CH^1(\mathbb{P}(\Delta))$ des fibrés en droites L sur $\mathbb{P}(\Delta)$.

Afin de donner pour l'anneau de Chow arithmétique $\widehat{CH}^*(\mathbb{P}(\Delta))$ un analogue de cette description, il nous est nécessaire de munir tout fibré en droites L sur $\mathbb{P}(\Delta)$ d'une métrique $\|\cdot\|_{L,\infty}$ « canonique » permettant entre autres choses le calcul explicite du produit :

$$\hat{c}_1(L, \|\cdot\|_{L,\infty})^p \in \widehat{CH}^p(\mathbb{P}(\Delta)),$$

où $\hat{c}_1(L, \|\cdot\|_{L,\infty})$ désigne la première classe de Chern arithmétique de $(L, \|\cdot\|_{L,\infty})$ (comparer avec [Ma1] où un point de vue analogue est développé pour les grassmanniennes).

Nous donnons plusieurs constructions d'une métrique $\|\cdot\|_{L,\infty}$ qui est canonique dans le sens où l'application $L \mapsto \|\cdot\|_{L,\infty}$ possède des propriétés fonctorielles (proposition 3.3.2) qui permettent de la caractériser entièrement. Malheureusement, la métrique ainsi construite n'est pas C^∞ en général. La première « forme » de Chern $c_1(L, \|\cdot\|_{L,\infty})$ est un courant réel de bidegré $(1,1)$, et donc le produit $c_1(L, \|\cdot\|_{L,\infty})^p$, et *a fortiori* le produit $\hat{c}_1(L, \|\cdot\|_{L,\infty})^p$, ne sont pas définis.

Nous sommes donc amenés dans un premier temps à étendre sur certains points la théorie développée dans [GS1], afin de pouvoir considérer en géométrie d'Arakelov des fibrés en droites munis de métriques non-nécessairement C^∞ . Comme, pour autant qu'il nous soit permis d'en juger, ces développements possèdent un intérêt propre, nous avons choisi d'en donner une exposition valable en toute généralité.

Quittons donc un instant l'univers torique, et considérons X une variété arithmétique quelconque de dimension absolue $d + 1$. Reprenant une terminologie introduite par Zhang [Zha], nous dirons d'un couple $(L, \|\cdot\|)$ formé d'un fibré en droites L sur X et d'une métrique hermitienne continue $\|\cdot\|$ sur $L(\mathbb{C})$ qu'il est *admissible* si L est engendré par ses sections globales, $\|\cdot\|$ est positive et peut être approchée uniformément sur $X(\mathbb{C})$ par des métriques positives C^∞ . Plus généralement, un fibré en droites sur X sera dit *intégrable* s'il est différence de deux fibrés en droites admissibles. Tout fibré en droites L sur $\mathbb{P}(\Delta)$ muni de sa métrique canonique $\|\cdot\|_{L,\infty}$ est intégrable (exemple 4.7.2).

Nous développons alors sur $X(\mathbb{C})$ un formalisme de *formes différentielles généralisées* ; en particulier la première « forme » de Chern $c_1(\bar{L})$ d'un fibré en droites intégrable $\bar{L}$ est une forme différentielle généralisée à notre sens. En nous appuyant sur une théorie développée par Bedford-Taylor [BeT] puis Demailly [De2], nous montrons comment l'on peut donner un sens au produit de deux telles formes (proposition 4.3.7).

Nous construisons ensuite un groupe gradué $\widehat{CH}_{\text{int}}^*(X)$ contenant l'anneau de Chow arithmétique usuel $\widehat{CH}^*(X)$, de telle sorte que pour tout fibré en droites intégrable $\bar{L}$ sur X , on ait $\hat{c}_1(\bar{L}) \in \widehat{CH}_{\text{int}}^1(X)$. Nous étendons alors partiellement le formalisme développé dans [GS1] au groupe $\widehat{CH}_{\text{int}}^*(X)$, ce qui nous permet de retrouver certains résultats de Zhang [Zha] concernant les fibrés intégrables. Notre principal résultat dans cette direction est le suivant (théorème 5.4.1). Il existe un accouplement :

$$\widehat{CH}_{\text{int}}^p(X) \otimes \widehat{CH}_{\text{int}}^q(X) \longrightarrow \widehat{CH}_{\text{int}}^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}},$$

qui prolonge celui défini par Gillet-Soulé sur $\widehat{CH}^*(X)$ et qui munit $\widehat{CH}_{\text{int}}^*(X)$ d'une structure d'anneau commutatif, associatif et unifié. De plus, on dispose d'un morphisme $\widehat{\deg} : \widehat{CH}_{\text{int}}^{d+1}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge celui défini dans [GS1], et tel que (théorème 5.5.6) si $\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{d+1}$ sont des fibrés intégrables sur X et $h_{\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{d+1}}(X)$ est la hauteur de X relativement à $\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{d+1}$ telle qu'elle est définie dans [Zha], alors :

$$h_{\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{d+1}}(X) = \widehat{\deg}(\hat{c}_1(\bar{L}_1) \cdots \hat{c}_1(\bar{L}_{d+1})).$$

Revenons au cas particulier des variétés toriques : Soient $\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_q$ des fibrés en droites sur $\mathbb{P}(\Delta)$ munis de leur métrique canonique ; nous donnons une formule explicite pour le produit généralisé $c_1(\bar{L}_1) \cdots c_1(\bar{L}_q)$ en terme de la combinatoire de Δ

(théorème 6.3.1). Nous montrons que cette formule conduit à un algorithme particulièrement simple pour le calcul du volume mixte de polytopes convexes (remarque 6.3.7).

Lorsque $q = d + 1$, nous montrons que la hauteur canonique $h_{\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{d+1}}(\mathbb{P}(\Delta))$ est nulle (proposition 7.1.1), puis nous approfondissons ce résultat en montrant (théorème 7.4.1) que le sous-anneau de $\widehat{CH}_{\text{int}}^*(\mathbb{P}(\Delta))$ engendré par les premières classes de Chern arithmétiques $\hat{c}_1(L, \|\cdot\|_{L, \infty})$ des fibrés en droites L sur $\mathbb{P}(\Delta)$ est isomorphe canoniquement à $CH^*(\mathbb{P}(\Delta))$. Ce résultat est l'analogue arithmétique du théorème de Jurkiewicz et Danilov. Nous en déduisons que la hauteur canonique d'une hypersurface dans $\mathbb{P}(\Delta)$ (*i.e.* sa hauteur relativement à des fibrés en droites sur $\mathbb{P}(\Delta)$ munis de leur métrique canonique) est donnée essentiellement par la mesure de Mahler du polynôme qui la définit (proposition 7.2.1).

En nous appuyant sur les résultats précédents, nous concluons cet article par la démonstration d'un analogue arithmétique du théorème de Bernstein-Koushnirenko (théorème 8.2.1 et corollaire 8.2.3) donnant une majoration de la hauteur des points d'intersections de d hypersurfaces de $\mathbb{P}(\Delta)$ en fonction de leur hauteur canonique et de leur polyèdre de Newton. Ce résultat étend aux variétés toriques projectives et lisses (mais pour des métriques différentes) un analogue arithmétique du théorème de Bézout dû à Bost, Gillet et Soulé [BGS].

Passons maintenant en revue l'organisation de cet article.

Le chapitre 2 est consacré aux variétés toriques sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$. Nous rappelons au 2.1 quelques propriétés simples des cônes et des éventails, et au 2.2 la construction d'après Demazure des variétés toriques et de leurs morphismes canoniques. Nous introduisons au 2.3 la notion de diviseur invariant et de fonction support associée. Nous rappelons en les adaptant à la situation sur $\mathbb{Z}$ certains critères pour l'amplitude d'un diviseur invariant. Au 2.4 nous montrons comment l'on peut construire de manière canonique une variété torique projective à partir d'un polytope convexe entier. Enfin le 2.5 est consacré à la structure de l'anneau de Chow d'une variété torique projective lisse. En utilisant une décomposition cellulaire sur $\mathbb{Z}$ d'une telle variété, nous montrons comment la plupart des résultats classiques (sur $\mathbb{C}$) s'étendent à la situation sur $\mathbb{Z}$; nous en profitons pour prouver un théorème d'annulation des groupes $CH^{p, p-1}(\mathbb{P}(\Delta))$. C'est là le seul point vraiment nouveau de ce chapitre.

Au chapitre 3 nous nous intéressons plus particulièrement aux variétés toriques complexes. La variété torique à coin $\mathbb{P}(\Delta)_{\geq}$ est définie au 3.1. Nous présentons au 3.2 un recouvrement canonique de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ introduit par Batyrev et Tschinkel [BaT] puis étudions certaines de ses propriétés. Nous utilisons ce recouvrement pour construire au 3.3 la métrique canonique $\|\cdot\|_{L, \infty}$. Nous montrons que cette métrique vérifie certaines propriétés de multiplicativité et de fonctorialité (proposition 3.3.2). Nous en donnons ensuite deux autres constructions, l'une basée sur un théorème de Zhang (théorème

3.3.3), l'autre par image inverse (proposition 3.3.8). Nous déduisons de cette dernière construction un théorème d'approximation globale pour $\|\cdot\|_{L,\infty}$ (proposition 3.3.12).

Le chapitre 4 est centré sur l'étude des formes différentielles généralisées sur une variété complexe arbitraire. Après avoir rappelé au 4.2 la théorie développée par Bedford-Taylor [BeT] puis Demailly [De2], nous définissons au 4.3 et au 4.4 plusieurs types remarquables de courants qui, grâce à cette théorie, peuvent être multipliés. Nous introduisons aux sections 4.5 et 4.7 les notions de fibrés en droites admissibles et de fibrés en droites intégrables, et montrons au 4.6 que tout fibré en droites ample muni d'une métrique positive sur une variété projective est admissible.

Nous abordons au chapitre 5 le cœur de notre sujet, à savoir la construction de l'anneau $\widehat{CH}_{\text{int}}^*(X)$ pour toute variété arithmétique X . Après avoir rappelé au 5.1 la théorie classique de Gillet-Soulé et introduit au 5.2 le groupe de Picard arithmétique généralisé $\widehat{\text{Pic}}_{\text{int}}(X)$, nous définissons au 5.3 les groupes de Chow arithmétiques généralisés $\widehat{CH}_{\text{int}}^p(X)$ (définition 5.3.11) puis nous construisons au 5.4 l'accouplement $\widehat{CH}_{\text{int}}^p(X) \otimes \widehat{CH}_{\text{int}}^q(X) \rightarrow \widehat{CH}_{\text{int}}^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}}$. Finalement nous relierons au 5.5 cette construction à celle de Zhang [Zha] (théorème 5.5.6), puis nous démontrons un résultat général de positivité (proposition 5.5.7) qui nous servira au chapitre 8 lors de la démonstration d'un analogue arithmétique du théorème de Bernstein-Koushnirenko.

Nous retournons à partir du chapitre 6 aux variétés toriques. Après avoir donné au 6.2 une expression explicite, pour tout fibré en droites $\bar{L}$ sur $\mathbb{P}(\Delta)$ muni de sa métrique canonique, du courant $c_1(\bar{L})$, nous généralisons ce résultat en donnant au 6.3 une formule explicite pour le produit généralisé de tels courants de Chern (théorème 6.3.1). Nous démontrons enfin au 6.4 un résultat d'annulation pour un tel produit (corollaire 6.4.2).

Le chapitre 7 est consacré à l'étude de la géométrie d'Arakelov des variétés toriques. Nous démontrons au 7.1 un théorème d'annulation des multihauteurs canoniques de $\mathbb{P}(\Delta)$ (proposition 7.1.1) et établissons au 7.2 une formule reliant la hauteur canonique d'une hypersurface dans $\mathbb{P}(\Delta)$ à la hauteur de Mahler du polynôme qui la définit (proposition 7.2.1). Le 7.3 présente un exemple intéressant : le calcul de la mesure de Mahler d'une droite dans $\mathbb{P}^2$. Nous exhibons au 7.4 une section canonique du morphisme d'anneaux application cycle $\zeta : \widehat{CH}_{\text{int}}^*(\mathbb{P}(\Delta)) \rightarrow CH^*(\mathbb{P}(\Delta))$.

Au 8.1, nous associons de manière fonctorielle une constante réelle positive $L(\nabla)$ à tout polytope convexe entier ∇ de $\mathbb{R}^d$, puis nous en donnons une majoration explicite lorsque ∇ est absolument simple (proposition 8.1.6). Finalement nous démontrons par récurrence au 8.2 un analogue arithmétique du théorème de Bernstein-Koushnirenko faisant intervenir dans son énoncé les constantes $L(\nabla)$ précédemment introduites (théorème 8.2.1 et corollaire 8.2.3).

Ce texte constitue une version remaniée d'une partie de la thèse de l'auteur [Ma3].

Certains des résultats présentés ici avaient été annoncés dans [Ma2].

L'auteur tient à exprimer sa profonde gratitude à J.-B. Bost sans l'aide duquel ce travail n'aurait jamais vu le jour. Il lui est également agréable de remercier J. Cassaigne, A. Chambert-Loir, D. Harari, M. Laurent, E. Leichtnam, J. Pfeiffer, C. Soulé et B. Teissier pour des discussions intéressantes, ainsi que les rapporteurs de ce texte pour de nombreuses remarques.