AUTOUR DES SCHÉMAS EN GROUPES

École d'été « Schémas en groupes »

Group Schemes
A celebration of SGA3

Volume III

Michel Demazure, Bas Edixhoven, Philippe Gille
Wilberd van der Kallen, Ting-Yu Lee
Simon Pepin Lehalleur, Matthieu Romagny
Jilong Tong, Jiu-Kang Yu

edited by
Bas Edixhoven, Philippe Gille, Gopal Prasad, Patrick Polo

Panoramas et Synthèses

Numéro 47

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

EDP Sciences
17, avenue du Hoggar
91944 Les Ulis Cedex A
France
www.edpsciences.com

Tarifs

Vente au numéro : 56 € ($ 84)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Panoramas et Synthèses
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 1272-3835

ISBN 978-2-85629-820-6

Directeur de la publication : Marc Peigné

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 47

AUTOUR DES SCHÉMAS EN GROUPES

École d'été « Schémas en groupes »

Group Schemes
A celebration of SGA3

Volume III

Michel Demazure, Bas Edixhoven, Philippe Gille,
Wilberd van der Kallen, Ting-Yu Lee,
Simon Pepin Lehalleur, Matthieu Romagny,
Jilong Tong, Jiu-Kang Yu

edited by
Bas Edixhoven, Philippe Gille, Gopal Prasad, Patrick Polo

Société mathématique de France 2015
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Michel Demazure
127, rue Anatole France, 37540 Saint-Cyr sur Loire, France
E-mail : michel@demazure.com

Bas Edixhoven
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Postbus 9512, 2300 RA Leiden, Nederland
E-mail : edix@math.leidenuniv.nl

Philippe Gille
UMR 5208 du CNRS - Institut Camille Jordan - Université Claude Bernard Lyon 1, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex - France.
Institut de Mathématiques Simion Stoilow de l'Académie Roumaine, Calea Grivitei 21, RO-010702 Bucarest, Roumanie.

Wilberd van der Kallen
Mathematisch Instituut Universiteit Utrecht, P.O. Box 80.010, NL-3508 TA Utrecht, The Netherlands
E-mail : W.vanderKallen@uu.nl

Ting-Yu Lee
DMA-Ecole normal supérieure, 45 Rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05, France
E-mail : ting-yu.lee@epfl.ch

Simon Pepin Lehalleur
Institut für Mathematik
Universität Zürich
E-mail : simon.pepin@math.uzh.ch

Matthieu Romagny
Institut de Recherche Mathématique de Rennes, Université Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France
E-mail : matthieu.romagny@univ-rennes1.fr

Jilong Tong
Université de Bordeaux 1, Institut de Mathématiques de Bordeaux, 33405 Talence France
E-mail : jilong.tong@math.u-bordeaux1.fr

Jiu-Kang Yu
The Institute of Mathematical Sciences, The Chinese University of Hong Kong, Shatin, N.T., Hong Kong
E-mail : jkyu@ims.cuhk.edu.hk

2000 ***Mathematics Subject Classification.*** — 11G05, 11G10, 13A50, 14K99, 14L15, 14L24, 14L30, 20G05, 20G35.

Mots-clé et phrases. — Constantes de structure, cross-section de Steinberg, données radicielles, isotropie, loi de groupe birationnelle, modèle de Néron, modèles, quotient adjoint, réductibilité, règle des signes, représentations fondamentales, schémas en groupes réductifs, schéma p-polynomial, schéma en groupes de Chevalley, schéma en groupes unipotent, schémas en groupes, sous-groupes paraboliques, systèmes de racines.

AUTOUR DES SCHÉMAS EN GROUPES

École d'été « Schémas en groupes »

Group Schemes
A celebration of SGA3

Volume III

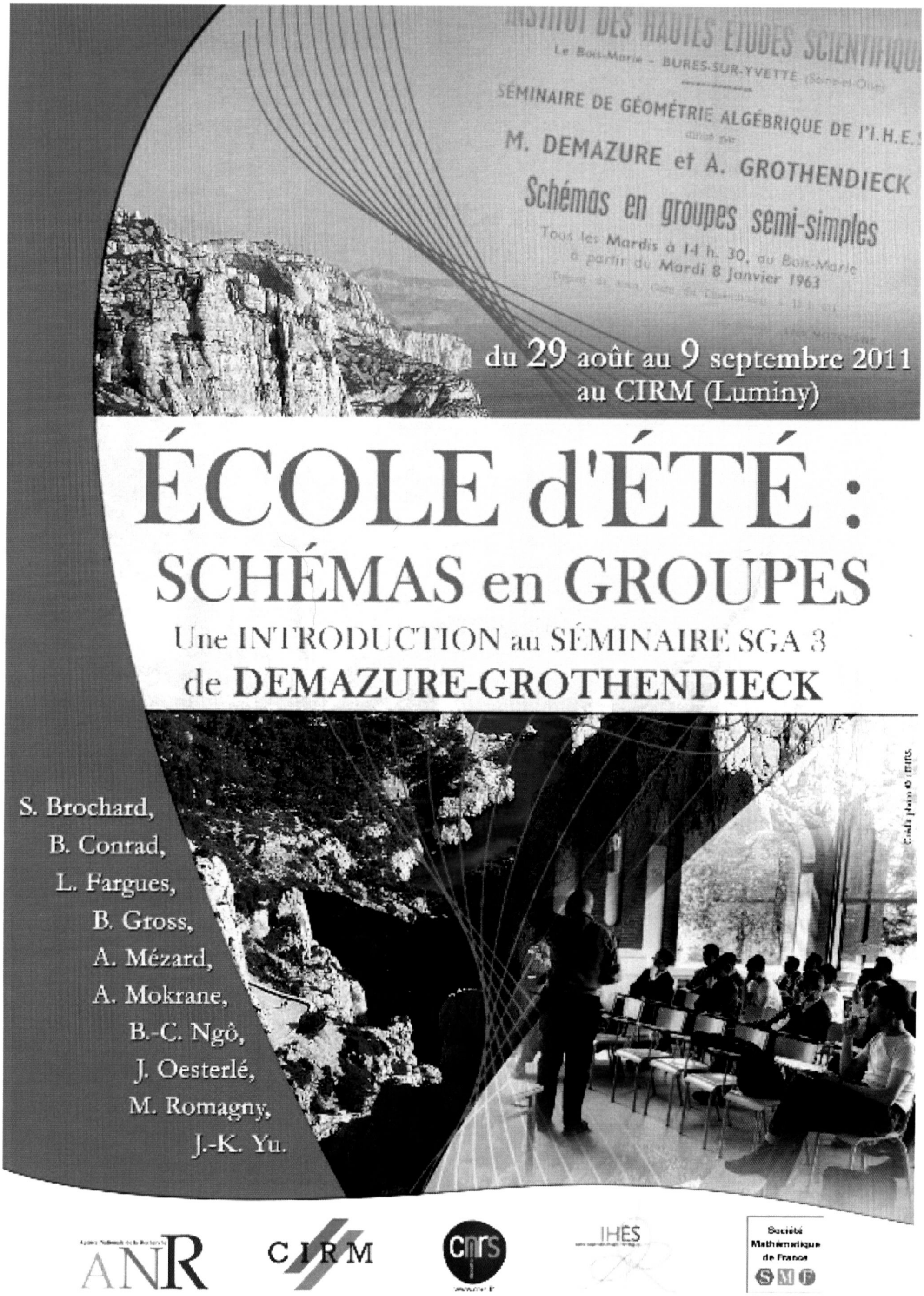
M. Demazure, B. Edixhoven, P. Gille, W. van der Kallen, T.-Y. Lee, S. Pepin Lehalleur, M. Romagny, J. Tong, J.-K. Yu

Abstract. — This volume contains the third part of the proceedings of the *Summer school "Group Schemes, introduction to the* SGA3 *seminar of Demazure-Grothendieck"*, which was held at the Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM) at Luminy in September 2011. This summer school was devoted to the theory of group schemes and especially of reductive group schemes.

As the second one, this third part mainly consists of expanded versions of talks given, some of which contain new results on group schemes.

Résumé. — Ce volume contient la troisième partie des actes de l'*École d'été « Schémas en groupes, une introduction au séminaire* SGA3 *de Demazure-Grothendieck »*, qui s'est tenue au Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM) à Luminy en septembre 2011. Cette école était consacrée à la théorie des schémas en groupes en particulier réductifs.

De même que le volume II, ce troisième volume est constitué principalement de versions développées d'exposés oraux, dont certains présentent des résultats originaux sur les schémas en groupes.



Réalisation graphique : Julien Fournigault.

TABLE DES MATIÈRES

MICHEL DEMAZURE — *La règle des signes de Tits* 1
1. Introduction 1
2. Groupes de rang un 2
3. Groupes de rang 2 : calcul de crochets 5
4. Le groupe de Weyl étendu 9
Références 13

BAS EDIXHOVEN & MATTHIEU ROMAGNY — *Group schemes out of birational group laws, Néron models* 15
1. Introduction 15
2. A case treated by André Weil 17
3. The case treated by Michael Artin in SGA3 21
4. Application to Néron models 30
5. Néron's smoothening process 31
6. From weak Néron models to Néron models 33
References 37

PHILIPPE GILLE — *Sur la classification des schémas en groupes semi-simples* 39
1. Introduction 39
2. Préliminaires 42
3. Sous-groupes paraboliques 57
4. La décomposition de Witt-Tits 73
5. Le cas du schéma en groupes des automorphismes d'un schéma de Chevalley 79
6. Sous-schémas paraboliques des données radicielles tordues 83
7. Isotropie et irréductibilité 90
8. Invariants cohomologiques des groupes semi-simples 95
9. Appendice : cohomologie des groupes à valeurs dans des groupes de Weyl 99
Références 108

WILBERD VAN DER KALLEN — *Good Grosshans filtration in a family* 111
1. Introduction 111
2. Recollections and conventions 113

3. Gradings 115
4. Picard graded Cox rings 116
5. Coherent sheaves 117
6. Resolution of the diagonal 119
7. Differently graded Cox rings 122
8. Variations on the Grosshans grading 122
9. Proof of the main result 124
10. Consequences for earlier work 126
Reductive group schemes over a Noetherian base ring 127
References 128

TING-YU LEE — *Adjoint quotients of reductive groups* 131
1. Introduction 131
2. Notations and Definitions 132
3. The adjoint quotient over $\mathbb{Z}$ 133
4. Stability under base change 137
5. Generalized Steinberg's cross-section 139
References 144

SIMON PEPIN LEHALLEUR — *Subgroups of maximal rank of reductive groups* . 147
Introduction 147
1. Lie algebras of subgroups of maximal rank 150
2. Root systems and p-closed subsets 151
3. Construction of subgroups of maximal rank from Lie algebras 156
4. Reduction to semi-simple absolutely simple simply connected groups 160
5. Very special isogenies in characteristics 2 and 3 and exceptional p-closed sets 161
6. The Borel-De Siebenthal algorithm in positive characteristic 164
A. Extended Dynkin diagrams 170
References 171

JILONG TONG — *Unipotent groups over a discrete valuation ring (after Dolgachev-Weisfeiler)* 173
Introduction 173
1. Notations and reviews 174
2. Generators of the R-algebra $R[G]$ 181
3. Geometry of unipotent groups 205
4. Some explicit models of two dimensional unipotent groups 216
References 224

JIU-KANG YU — *Smooth models associated to concave functions in Bruhat-Tits theory* 227
0. Introduction 227

1. Notations 230
2. Modifying integral models 232
3. Smooth models for parahoric subgroups 235
4. Admissible filtrations on tori 238
5. The minimal congruent filtrations of tori 242
6. Good filtrations of tori 244
7. Lemmas 245
8. Smooth models associated to concave functions 249
9. Comments and additional results 252
10. The compact groups in the construction of tame types 254
References 257

RÉSUMÉS DES ARTICLES

La règle des signes de Tits
MICHEL DEMAZURE 1

Cette note explicite la remarque 6.7 de l'exposé XXIII de SGA3 ([SGA3, 1970], p. 322 et [SGA3, 2011], p. 219), sous la forme d'une relecture des exposés XX et XXIII, à la lumière de l'article de Tits [1966] cité dans cette remarque.

Schémas de groupes obtenus à partir de lois de groupe birationnelles, modèles de Néron
BAS EDIXHOVEN & MATTHIEU ROMAGNY 15

Dans cette note, nous présentons le théorème d'extension d'une loi de groupe birationnelle en un groupe algébrique, dans le cadre des variétés algébriques classiques (Weil) et des schémas (Artin). Nous améliorons légèrement le résultat original et sa preuve en donnant une construction plus directe du groupe, en apportant des compléments sur ses propriétés de séparation, et en utilisant systématiquement les espaces algébriques. Nous expliquons aussi l'application importante à la construction des modèles de Néron des variétés abéliennes. Cette note est issue des cours donnés par Ariane Mézard et le second auteur à l'École d'été « Schémas en groupes » qui s'est tenue au CIRM (Luminy) du 29 août au 9 septembre 2011.

Sur la classification des schémas en groupes semi-simples
PHILIPPE GILLE 39

Nous abordons la classification des schémas en groupes semi-simples du point de vue cohomologique et immobilier à la Bruhat-Tits afin de généraliser les techniques galoisiennes sur un corps à des anneaux plus généraux. Cela amène à étudier la notion de réductibilité pour les schémas en groupes réductifs en lien avec les sous-groupes à un paramètre. De plus, on travaille avec des schémas en groupes affines lisses G non nécessairement connexes mais à composante neutre réductive, ce qui nous conduit à étudier les normalisateurs de sous-groupes paraboliques de G^0 et leurs espaces principaux homogènes. Enfin, l'exposé contient en appendice des analogies pour les schémas en groupes de Weyl et les données radicielles tordues.

Faisceaux munis de filtration de Grosshans bonne

WILBERD VAN DER KALLEN 111

Nous généralisons le résultat principal de [V. Srinivas, W. van der Kallen, 2009], en remplaçent le corps de base par un anneau commutatif noethérien **k**. Ainsi on obtient de l'information sur la cohomologie $H^*(G, A)$, où G est un schéma en groupes réductif sur **k** et A est une **k**-algèbre de type fini. Nous suivons les grandes lignes du texte original [V. Srinivas, W. van der Kallen, 2009].

Quotients adjoints de groupes réductifs

TING-YU LEE 131

Soit k un anneau commutatif et G un groupe réductif sur k. Dans cet article, on va definir le quotient adjoint G//G de G sur k et démontrer que la construction est stable par changement de base. En plus, si G possède un tore maximal T, le quotient adjoint de T par son groupe de Weyl est isomorphe à G // G. Dans la derniere section, on se concentre sur le cas G semi-simple simplement connexe de type constant. Dans ce cas, G // G est isomorphe à la restriction de Weil $\prod_{\mathrm{D}/\mathrm{spec}\, k} \mathbb{A}^1_{\mathrm{D}}$, où D est le schéma de Dynkin. Si G est de plus quasi-déployable et sans composantes de type A_{2m}, on peut construire la cross-section de Steinberg sur k.

Sous-groupes de groupes réductifs de rang maximal

SIMON PEPIN LEHALLEUR 147

Dans l'article [1949], Borel et De Siebenthal étudient la structure des sous-groupes de rang maximal des groupes de Lie compacts. Dans cette note, nous montrons comment les méthodes de [SGA3, 1970] permettent d'étendre leurs résultats aux schémas en groupes réductifs sur une base génerale. Nous discutons en particulier les sous-groupes exceptionnels qui apparaissent en caractéristiques 2 et 3.

Groupes unipotents sur un anneau de valuation discret (d'après Dolgachev-Weisfeiler)

JILONG TONG 173

Le but de ces notes est de comprendre le travail important [Dolgachev-Weisfeiler, 1974] de Dolgachev-Weisfeiler sur les schémas en groupes unipotents sur un anneau de valuation discrète. Parmi les résultats présentés dans ces notes, nous démontrons, suivant [Dolgachev-Weisfeiler, 1974], l'existence de bons générateurs de l'anneau affine d'un tel schéma en groupes.

Modèles lisses associés aux fonctions concaves en théorie de Bruhat-Tits
JIU-KANG YU 227

La théorie de Bruhat-Tits donne lieu à une construction systématique de sous-groupes bornés au moyen de fonctions concaves f. Dans le cas où $f(0) = 0$, le groupe borné correspondant peut être enrichi d'une structure de schéma en groupes sur l'anneau d'entiers du corps local de base. Nous donnons une nouvelle construction de ces schémas en groupes en levant l'hypothèse $f(0) = 0$, de sorte que le résultat est applicable à une famille étendue de sous-groupes bornés utilisés en théorie des représentations, notamment les groupes de Moy-Prasad.

ABSTRACTS

Tits' sign rule

MICHEL DEMAZURE 1

This note is an explicitation of remark 6.7 in *Exposé* XXIII of SGA3 ([SGA3, 1970] and [SGA3, 2011]). We will re-read *Exposés* XX and XXIII and recover Tits' commutation rule, as given in [Tits, 1966].

Group schemes out of birational group laws, Néron models

BAS EDIXHOVEN & MATTHIEU ROMAGNY 15

In this note, we present the theorem of extension of birational group laws in both settings of classical varieties (Weil) and schemes (Artin). We improve slightly the original proof and result with a more direct construction of the group extension, a discussion of its separation properties, and the systematic use of algebraic spaces. We also explain the important application to the construction of Néron models of abelian varieties. This note grew out of lectures given by Ariane Mézard and the second author at the Summer School "Schémas en groupes" held in the CIRM (Luminy) from 29 August to 9 September, 2011.

On the classification of semisimple group schemes

PHILIPPE GILLE 39

We deal with the classification of semisimple group schemes via the Bruhat-Tits' presentation of non-abelian cohomology. The goal is to generalize Galois techniques to more general rings. It leads us to investigate the concept of reducibility for reductive group schemes with special attention to one parameter subgroups. It requires also the study of parabolic subgroups and their normalizers of a not-necessarily connected affine smooth group scheme G whose neutral component G^0 is reductive. The text discusses in an appendix also certain analogies for Weyl group schemes and twisted root data.