

*quatrième série - tome 50      fascicule 1      janvier-février 2017*

*ANNALES  
SCIENTIFIQUES  
de  
L'ÉCOLE  
NORMALE  
SUPÉRIEURE*

Alina MARIAN & Dragos OPREA & Rahul PANDHARIPANDE

*Segre classes and Hilbert schemes of points*

---

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

# Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

---

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

**Responsable du comité de rédaction / *Editor-in-chief***

Emmanuel KOWALSKI

**Publication fondée en 1864 par Louis Pasteur**

Continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE  
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY  
de 1889 à 1900 par C. HERMITE  
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX  
de 1918 à 1941 par É. PICARD  
de 1942 à 1967 par P. MONTEL

**Comité de rédaction au 1<sup>er</sup> janvier 2017**

P. BERNARD      A. NEVES  
S. BOUCKSOM    J. SZEFTEL  
E. BREUILLARD   S. VŨ NGỌC  
R. CERF          A. WIENHARD  
G. CHENEVIER    G. WILLIAMSON  
E. KOWALSKI

**Rédaction / *Editor***

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,  
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.  
Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.  
[annales@ens.fr](mailto:annales@ens.fr)

---

**Édition / *Publication***

Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré  
11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05  
Tél. : (33) 01 44 27 67 99  
Fax : (33) 01 40 46 90 96

**Abonnements / *Subscriptions***

Maison de la SMF  
Case 916 - Luminy  
13288 Marseille Cedex 09  
Fax : (33) 04 91 41 17 51  
email : [smf@smf.univ-mrs.fr](mailto:smf@smf.univ-mrs.fr)

**Tarifs**

Europe : 519 €. Hors Europe : 548 €. Vente au numéro : 77 €.

---

© 2017 Société Mathématique de France, Paris

En application de la loi du 1<sup>er</sup> juillet 1992, il est interdit de reproduire, même partiellement, la présente publication sans l'autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

*All rights reserved. No part of this publication may be translated, reproduced, stored in a retrieval system or transmitted in any form or by any other means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without prior permission of the publisher.*

---

ISSN 0012-9593

Directeur de la publication : Stéphane Seuret  
Périodicité : 6 n<sup>os</sup> / an

# SEGRE CLASSES AND HILBERT SCHEMES OF POINTS

BY ALINA MARIAN, DRAGOS OPREA  
AND RAHUL PANDHARIPANDE

---

**ABSTRACT.** – We prove a closed formula for the integrals of the top Segre classes of tautological bundles over the Hilbert schemes of points of a  $K3$  surface  $X$ . We derive relations among the Segre classes via equivariant localization of the virtual fundamental classes of Quot schemes on  $X$ . The resulting recursions are then solved explicitly. The formula proves the  $K$ -trivial case of a conjecture of M. Lehn from 1999.

The relations determining the Segre classes fit into a much wider theory. By localizing the virtual classes of certain relative Quot schemes on surfaces, we obtain new systems of relations among tautological classes on moduli spaces of surfaces and their relative Hilbert schemes of points. For the moduli of  $K3$  surfaces, we produce relations intertwining the  $\kappa$  classes and the Noether-Lefschetz loci. Conjectures are proposed.

**RÉSUMÉ.** – Nous démontrons une formule explicite pour les intégrales des classes de Segre des fibrés tautologiques sur les schémas de Hilbert ponctuels d'une surface  $K3$ . À cette fin, on utilise la formule de localisation de la classe virtuelle fondamentale pour certains schémas Quot de Grothendieck associés à la surface  $K3$ . On en déduit sur les schémas de Hilbert ponctuels des formules récursives entraînant les classes de Segre, qu'on peut résoudre explicitement. Ce résultat établit une conjecture de M. Lehn de 1999, dans le cas des surfaces de classe canonique triviale.

Les récursions décrites ici appartiennent à un tableau beaucoup plus vaste. En localisant les classes virtuelles des schémas Quot relatifs, on obtient des nouvelles relations entre les classes tautologiques dans l'anneau de Chow des espaces des modules des surfaces et de leurs schémas de Hilbert ponctuels relatifs. Pour l'espace des modules des surfaces  $K3$ , cette méthode donne des relations entre les classes  $\kappa$  et les classes de Noether-Lefschetz. Nous proposons de nouvelles conjectures sur les anneaux de Chow tautologiques.

## 0. Introduction

### 0.1. Segre classes

Let  $(S, H)$  be a pair consisting of a nonsingular projective surface  $S$  and a line bundle

$$H \rightarrow S.$$

The *degree* of the pair  $(S, H)$  is defined via the intersection product on  $S$ ,

$$H \cdot H = \int_S H^2 \in \mathbb{Z}.$$

The Hilbert scheme of points  $S^{[n]}$  carries a tautological rank  $n$  vector bundle  $H^{[n]}$  whose fiber over  $\zeta \in S^{[n]}$  is given by

$$\zeta \mapsto H^0(H \otimes \mathcal{O}_\zeta).$$

The top Segre class

$$N_{S,H,n} = \int_{S^{[n]}} s_{2n}(H^{[n]})$$

appeared first in the algebraic study of Donaldson invariants via the moduli space of rank 2 bundles on  $S$  [25]. Such Segre classes play a basic role in the Donaldson-Thomas counting of sheaves (often entering via the obstruction theory). A classical interpretation of  $N_{S,H,n}$  is also available. If  $|H|$  is a linear system of dimension  $3n - 2$  which induces a map

$$S \rightarrow \mathbb{P}^{3n-2},$$

$N_{S,H,n}$  counts the  $n$ -chords of dimension  $n - 2$  to the image of  $S$ .

The main result of the paper is the calculation of the top Segre classes for all pairs  $(X, H)$  in the  $K3$  case.

**THEOREM 1.** – *If  $(X, H)$  is a nonsingular  $K3$  surface of degree  $2\ell$ , then*

$$\int_{X^{[n]}} s_{2n}(H^{[n]}) = 2^n \binom{\ell - 2n + 2}{n}.$$

## 0.2. Lehn's conjecture

Let  $S$  be a nonsingular projective surface. The Segre class  $N_{S,H,n}$  can be expressed as a polynomial of degree  $n$  in the four variables

$$H^2, H \cdot K_S, K_S^2, c_2(S),$$

see [24] for a proof. Furthermore, the form

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} N_{S,H,n} z^n = \exp \left( H^2 \cdot A_1(z) + (H \cdot K_S) \cdot A_2(z) + K_S^2 \cdot A_3(z) + c_2(S) \cdot A_4(z) \right)$$

in terms of four universal power series  $A_1, A_2, A_3, A_4$  was proven in [7]. The formulas for the four power series were explicitly conjectured by M. Lehn in 1999.

**CONJECTURE 1** (Lehn [14]). – *We have*

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} N_{S,H,n} z^n = \frac{(1-w)^a (1-2w)^b}{(1-6w+6w^2)^c}$$

for the change of variable

$$z = \frac{w(1-w)(1-2w)^4}{(1-6w+6w^2)^3}$$

and constants

$$a = H \cdot K_S - 2K_S^2, \quad b = (H - K_S)^2 + 3\chi(\mathcal{O}_S), \quad c = \frac{1}{2}H(H - K_S) + \chi(\mathcal{O}_S).$$

As usual in the study of the Hilbert scheme of points, Theorem 1 determines two of the power series in (1). Specifically, Theorem 1 implies

$$(3) \quad A_1 \left( \frac{1}{2}t(1+t)^2 \right) = \frac{1}{2} \log(1+t),$$

$$(4) \quad A_4 \left( \frac{1}{2}t(1+t)^2 \right) = \frac{1}{8} \log(1+t) - \frac{1}{24} \log(1+3t).$$

The evaluation of  $A_1$  and  $A_4$  proves Lehn’s conjecture for all surfaces with numerically trivial canonical bundle.

COROLLARY 1. – *If  $(A, H)$  is an abelian or bielliptic surface of degree  $2\ell$ , then*

$$\int_{A^{[n]}} s_{2n}(H^{[n]}) = \frac{2^n \ell}{n} \binom{\ell - 2n - 1}{n - 1}.$$

COROLLARY 2. – *If  $(E, H)$  is an Enriques surface of degree  $2\ell$ , then*

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} N_{E,H,n} z^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \binom{2\ell - 2n + 2}{n} z^n.$$

**0.3. Strategy of the proof**

The intersection theory of the Hilbert scheme of points can be approached via the inductive recursions set up in [7] or via the Nakajima calculus [14, 19]. By these methods, the integration of tautological classes is reduced to a combinatorial problem. Another strategy is to prove an equivariant version of Lehn’s conjecture for the Hilbert scheme of points of  $\mathbb{C}^2$  via appropriately weighted sums over partitions. However, we do not know how to prove Theorem 1 along these lines. <sup>(1)</sup>

Let  $(X, H)$  be a nonsingular projective  $K3$  surface. We consider integrals over the Quot scheme  $Q_{H,\chi}(\mathbb{C}^2)$  parametrizing quotients

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow F \rightarrow 0$$

where  $F$  is a rank 0 coherent sheaf satisfying

$$c_1(F) = H \quad \text{and} \quad \chi(F) = \chi.$$

The Quot scheme admits a reduced virtual class, and the integrals

$$\int_{[Q_{H,\chi}(\mathbb{C}^2)]^{\text{red}}} \gamma \cdot 0^k$$

vanish for all  $k > 0$  and for all choices of Chow classes  $\gamma$ . Here, the notation  $0$  stands for the first Chern class of the trivial line bundle

$$c_1(\mathcal{O}) = 0 \in A^1(Q_{H,\chi}(\mathbb{C}^2)).$$

<sup>(1)</sup> The parallel problem in dimension 1, the calculation of the Segre classes of tautological bundles over Hilbert schemes of points of nonsingular curves, has been solved in [5, 13, 26].