

**324**

**ASTÉRISQUE**

**2009**

FAMILIES OF GALOIS REPRESENTATIONS  
AND SELMER GROUPS

Joël Bellaïche & Gaëtan Chenevier

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

---

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France.

Numéro 324, 2009

---

*Comité de rédaction*

Jean-Benoît BOST	Patrice LE CALVEZ
Guy DAVID	Guy MÉTIVIER
Olivier DEBARRE	Robert Alain OLIVER
Damien GABORIAU	Raphaël ROUQUIER
Guy HENNIART	Wolfgang SOERGEL
Masaki KASHIWARA	Wendelin WERNER
Yves ANDRÉ (dir.)	

*Diffusion*

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	www.ams.org

*Tarifs 2009*

*Vente au numéro* : 70 € (\$105)

*Abonnement* Europe : 454 €, hors Europe : 503 € (\$754)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat : Nathalie Christiaën*

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2009

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-264-8

Directeur de la publication : Aline BONAMI

---

**324**

**ASTÉRISQUE**

**2009**

FAMILIES OF GALOIS REPRESENTATIONS  
AND SELMER GROUPS

Joël Bellaïche & Gaëtan Chenevier

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

*Joël Bellaïche*

509 Math Building, Columbia University, 2990 Broadway, New York, NY 10027  
jbellaic@math.columbia.edu

*Gaëtan Chenevier*

Laboratoire Analyse Géométrie et Applications, Institut Galilée, Université Paris 13,  
99 Av. J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France  
Gaetan.Chenevier@normalesup.org

---

**Classification mathématique par sujet (2000).** — 11F80 (11F33, 11F85, 14F30), 14D15 (14B12, 14G22), 11G40 (11S25, 11F70, 11R39, 11F55), 20G05 (20C15, 15A24).

**Mots-clés.** — Pseudo-caractère, lieu de réductibilité, représentation galoisienne, trianguline, déformation  $p$ -adique, variété de Hecke, groupe de Selmer, conjectures de Bloch-Kato, groupe unitaire, représentation automorphe, conjecture d'Arthur.

---

*Ce livre est dédié à la mémoire de Serge Bellaïche, frère et ami.*



# FAMILIES OF GALOIS REPRESENTATIONS AND SELMER GROUPS

Joël BELLAÏCHE & Gaëtan CHENEVIER

**Abstract.** — This book presents an in-depth study of the families of Galois representations carried by the  $p$ -adic eigenvarieties attached to unitary groups. The study encompasses some general algebraic aspects (properties of the space of representations of a group in the neighbourhood of a point, reducibility loci, pseudocharacters), and other aspects more specific to Galois groups of local or number fields. In particular, we define and study certain deformation functors of crystalline representations of the absolute Galois group of  $\mathbb{Q}_p$ , namely *trianguline deformations*, which are naturally associated to the families above. As an application, we show how the geometry of these eigenvarieties at “classical” points is related to the dimension of certain Selmer groups. This, combined with conjectures of Langlands and Arthur on the discrete automorphic spectrum of unitary groups, allows us to prove, amongst other things, new cases of the Bloch-Kato conjectures (in any dimension).

**Résumé (Familles de représentations galoisiennes et groupes de Selmer).** — Ce livre présente une étude approfondie des familles de représentations galoisiennes portées par les variétés de Hecke  $p$ -adiques des groupes unitaires. Cette étude comprend des aspects algébriques généraux (propriétés de l’espace des représentations d’un groupe au voisinage d’un point, lieux de réductibilité, pseudo-caractères), et d’autres plus spécifiques aux groupes de Galois des corps locaux ou des corps de nombres. Nous définissons et étudions notamment certains foncteurs de déformations des représentations cristallines du groupe de Galois absolu de  $\mathbb{Q}_p$  (*déformations triangulines*) qui sont naturellement associés aux familles ci-dessus. En guise d’application, nous montrons comment la géométrie de ces variétés de Hecke aux points « classiques » est reliée à la dimension de certains groupes de Selmer. Ceci, conjugué aux conjectures de Langlands et Arthur sur le spectre automorphe discret des groupes unitaires, nous permet entre autres de démontrer de nouveaux cas des conjectures de Bloch-Kato (en toute dimension).





# CONTENTS

<b>Introduction</b> .....	1
<b>1. Pseudocharacters, representations and extensions</b> .....	7
1.1. Introduction .....	7
1.2. Some preliminaries on pseudocharacters .....	12
1.2.1. Definitions .....	12
1.2.2. Main example .....	13
1.2.3. The Cayley-Hamilton identity and Cayley-Hamilton pseudocharacters .....	14
1.2.4. Faithful pseudocharacters, the kernel of a pseudocharacter .....	14
1.2.5. Cayley-Hamilton quotients .....	15
1.2.6. Two useful lemmas on pseudocharacters .....	16
1.2.7. Tensor operations on pseudocharacters .....	18
1.3. Generalized matrix algebras .....	19
1.3.1. Definitions, notations and examples .....	20
1.3.2. Structure of a GMA .....	21
1.3.3. Representations of a GMA .....	22
1.3.4. An embedding problem .....	24
1.3.5. Solution of the embedding problem in the reduced and nondegenerate case .....	25
1.3.6. Solution of the embedding problem in the general case .....	28
1.4. Residually multiplicity-free pseudocharacters .....	31
1.4.1. Definition .....	31
1.4.2. Lifting idempotents .....	31
1.4.3. The structure theorem .....	33
1.5. Reducibility loci and Ext-groups .....	34
1.5.1. Reducibility loci .....	34
1.5.2. The representation $\rho_i$ .....	36
1.5.3. An explicit construction of extensions between the $\rho_i$ 's .....	37
1.5.4. The projective modules $M_i$ and a characterization of the image of $\iota_{i,j}$ .....	39
1.5.5. Complement: Topology .....	42
1.6. Representations over $A$ .....	43
1.7. An example: the case $r = 2$ .....	47

1.8. Pseudocharacters with a symmetry .....	50
1.8.1. The set-up .....	50
1.8.2. Lifting idempotents .....	51
1.8.3. Notations and choices .....	53
1.8.4. Definition of the morphisms $\tau_{i,j}$ .....	54
1.8.5. Definition of the morphisms $\perp_{i,j}$ .....	54
1.8.6. The main result .....	55
1.8.7. A special case .....	56
<b>2. Trianguline deformations of refined crystalline representations .</b>	<b>59</b>
2.1. Introduction .....	59
2.2. Preliminaries of $p$ -adic Hodge theory and $(\varphi, \Gamma)$ -modules .....	63
2.2.1. Notations and conventions .....	63
2.2.2. $(\varphi, \Gamma)$ -modules over the Robba ring $\mathcal{R}_A$ .....	63
2.2.3. Some algebraic properties of $\mathcal{R}_A$ .....	64
2.2.4. Étale and isocline $\varphi$ -modules .....	66
2.2.5. Cohomology of $(\varphi, \Gamma)$ -modules .....	67
2.2.6. $(\varphi, \Gamma)$ -modules and representations of $G_p$ .....	67
2.2.7. Berger's theorem .....	68
2.3. Triangular $(\varphi, \Gamma)$ -modules and trianguline representations over artinian $\mathbb{Q}_p$ -algebras .....	71
2.3.1. $(\varphi, \Gamma)$ -modules of rank one over $\mathcal{R}_A$ .....	71
2.3.2. Definitions .....	72
2.3.3. Weights and Sen polynomial of a triangular $(\varphi, \Gamma)$ -module .....	72
2.3.4. De Rham triangular $(\varphi, \Gamma)$ -modules. ....	73
2.3.5. Deformations of triangular $(\varphi, \Gamma)$ -modules .....	75
2.3.6. Trianguline deformations of trianguline representations .....	80
2.4. Refinements of crystalline representations .....	81
2.4.1. Definition .....	81
2.4.2. Refinements and triangulations of $(\varphi, \Gamma)$ -modules .....	82
2.4.3. Non critical refinements .....	83
2.5. Deformations of non critically refined crystalline representations ....	85
2.5.1. A local and infinitesimal version of Coleman's classicity theorem	86
2.5.2. A criterion for a deformation of a non critically refined crystalline representation to be trianguline .....	86
2.5.3. Properties of the deformation functor $X_{V, \mathcal{G}}$ .....	89
2.6. Some remarks on global applications .....	91
<b>3. Generalization of a result of Kisin on crystalline periods .....</b>	<b>93</b>
3.1. Introduction .....	93
3.2. A formal result on descent by blow-up .....	95
3.2.1. Notations .....	95
3.2.2. The left-exact functor $D$ .....	96