369

ASTÉRISQUE

2015

DE LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
AUX FORMES AUTOMORPHES (I)

J.-B. BOST, P. BOYER, A. GENESTIER,
L. LAFFORGUE, S. LYSENKO, S. MOREL, B.C. NGÔ, eds.

COHOMOLOGIE AUTOMORPHE ET SOUS-VARIÉTÉS DES VARIÉTÉS DE GRIFFITHS-SCHMID

Henri CARAYOL

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 369, 2015

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 82 € ($ 123)
Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1033)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-805-3

Directeur de la publication : Marc Peigné

Astérisque
369, 2015, p. 203–222

COHOMOLOGIE AUTOMORPHE ET SOUS-VARIÉTÉS DES VARIÉTÉS DE GRIFFITHS-SCHMID

par

Henri Carayol

À Gérard Laumon à l'occasion de son soixantième anniversaire.

Résumé. — Nous considérons dans cet article des variétés de Griffiths-Schmid (variantes non algébriques des variétés de Shimura) attachées à des groupes unitaires en 3 variables, ainsi que différentes sous-variétés, isomorphes à des courbes de Shimura. Nous étudions la restriction à ces sous-variétés de certaines classes de « cohomologie automorphe » de degré 1, associées à des formes modulaires de Picard. Au moyen de transformations cohomologiques du type Penrose, nous comparons cette restriction à la situation plus classique de restriction à une sous-variété d'une variété de Shimura (ici, une variété modulaire de Picard). Le but de ce travail (et d'autres qui l'ont précédé) est de rechercher une possible structure arithmétique sur les groupes de cohomologie automorphe.

***Abstract* (Automorphic cohomology and subvarieties of Griffiths-Schmid varieties)**
We consider in this article some Griffiths-Schmid varieties (non-algebraic analogues of Shimura varieties) attached to some unitary groups in 3 variables, and several subvarieties, which are isomorphic to Shimura curves. We study the restriction to these subvarieties of certain "automorphic cohomology" classes of degree one, associated to some Picard modular forms. Using certain Penrose-type cohomological transforms, we compare this restriction to the more classical restriction from a Shimura variety (in our case, a Picard modular variety) to a subvariety. Our aim in this paper (and in some previous ones) is to look for a possible arithmetic structure on automorphic cohomology groups.

0. Introduction

0.1. Nous appellerons « variété de Griffiths-Schmid » un quotient de la forme $M_\Gamma = \Gamma \setminus \mathbf{\Omega}$ où $\mathbf{\Omega}$ désigne, suivant la terminologie de [**13**], un « domaine de Mumford-Tate » et Γ un sous-groupe de congruence dans un $\mathbb{Q}$-groupe réductif G. Un tel domaine $\mathbf{\Omega}$

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 11F23, 11G18, 14G35, 32N99.
Mots clefs. — Forme automorphe, groupe unitaire, variété de Picard, cohomologie automorphe, variété de Griffiths-Schmid.

est une $G(\mathbb{R})$-orbite ouverte dans une variété de drapeaux pour $G(\mathbb{C})$. Ces variétés, étudiées par Griffiths et Schmid dès la fin des années 60, sont des variétés analytiques complexes, qui généralisent les variétés de Shimura. Comme ces dernières elles admettent aussi des versions adéliques, sous la forme de quotients $G(\mathbb{Q})\backslash\mathbf{\Omega}\times G(\mathbb{A}_f)/K$, avec K un sous-groupe compact ouvert du groupe $G(\mathbb{A}_f)$ des points à valeurs dans les adèles finies. Ces domaines de Mumford-Tate peuvent d'ailleurs être définis par une donnée similaire à celle qui nous est familière dans le cadre des variétés de Shimura, c'est-à-dire par un morphisme :

$$h : \mathbb{C}^* \longrightarrow G(\mathbb{R})$$

non trivial et tel que la conjugaison par $h(i)$ induise une involution de Cartan de $G(\mathbb{R})$, mais on n'impose plus ici que la structure de Hodge induite sur l'algèbre de Lie soit de type $(-1,1)(0,0)(1,-1)$. Les variétés correspondantes apparaissent alors comme des espaces de paramètres pour certaines structures de Hodge polarisées munies de données additionnelles. En général, et contrairement à ce qui se passe pour les variétés de Shimura, la famille universelle correspondante de structures de Hodge n'est pas une variation : la condition de transversalité de Griffiths $\nabla\mathrm{F}^p\subset\mathrm{F}^{p-1}\otimes\mathbf{\Omega}^1_{M_\Gamma}$ n'est pas satisfaite. Elle l'est seulement sur certaines sous-variétés *horizontales* relativement à un sous-fibré du fibré tangent. De façon explicite, le domaine $\mathbf{\Omega}$ est un ouvert d'une variété de drapeaux $\mathbf{\Omega}^\vee = G_{\mathbb{C}}/P$, où P est le sous-groupe parabolique d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}=\mathrm{F}^0(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ (pour la structure de Hodge induite sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ par h). Le champ de sous-espaces horizontaux provient d'un champ équivariant de sous espaces du fibré tangent de $\mathbf{\Omega}^\vee$, donné à l'origine par l'inclusion $\mathrm{F}^{-1}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{p}$. Voir [**7**] pour plus de détails.

0.2. Par ailleurs, le domaine $\mathbf{\Omega}$ lui-même apparaît comme un espace homogène $G(\mathbb{R})/H$, avec $H=G(\mathbb{R})\cap P$ un sous-groupe, compact mais non nécessairement maximal, contenant un sous-groupe de Cartan compact. Aux représentations (de dimension finie) de H correspondent, de façon habituelle, des fibrés vectoriels équivariants sur $\mathbf{\Omega}$ et donc sur les quotients M_Γ. La cohomologie cohérente (« cohomologie automorphe ») de ces variétés à coefficients dans ces fibrés a été étudiée par différents auteurs. Le lien avec les formes automorphes est semblable à ce qu'on connaît dans le cas des variétés de Shimura. Une différence essentielle tient en ce que le H^0 peut être nul ou trivial, et l'essentiel de la cohomologie concentré en des degrés supérieurs. On n'obtient pas alors de plongement projectif, et d'ailleurs les variétés M_Γ ne sont pas en général algébriques : voir le récent travail de Griffiths, Robles et Toledo ([**15**]) sur cette question.

0.3. Ce travail fait suite à la série d'articles [**2**], [**3**], [**4**], dans lesquels nous avons étudié le cas des variétés de Griffiths-Schmid attachées aux groupes unitaires en trois variables; il s'agit du plus petit exemple possible d'une telle variété qui ne soit pas de Shimura. À l'origine je m'étais aperçu que certaines formes automorphes (liées aux limites dégénérées de séries discrètes), qui n'admettent aucune réalisation dans la cohomologie des variétés de Shimura, apparaissaient cependant dans la cohomologie de cette variété de Griffiths-Schmid. Cela constitue la motivation fondamentale de l'ensemble de cette étude. Si l'on pouvait comprendre les propriétés arithmétiques de la cohomologie des variétés de Griffiths-Schmid on en déduirait des résultats sur des formes automorphes qui pour l'instant échappent complétement à la théorie (en particulier, sur les formes de Maass correspondant à la valeur propre $\frac{1}{4}$ du laplacien). Bien sûr, une difficulté essentielle à laquelle on se heurte aussitôt tient à la non-algébricité de la variété étudiée. On cherche néanmoins, même en l'absence de cette algébricité, à définir des structures rationnelles sur la cohomologie automorphe.

Dans l'article [**4**], on donnait une telle définition en termes de « développement de Fourier aux pointes » : cela reposait sur la « compactification » (en fait seulement partielle) que Kato et Usui ont construite des espaces de modules des structures de Hodge. Pour une 1-classe de cohomologie de type holomorphe ou anti-holomorphe, on définissait des « coefficients de Fourier » (en fait des éléments du H^1 d'une courbe elliptique à multiplication complexe) et l'on montrait qu'il existe une base dans la cohomologie de ce type constituée de classes dont tous les coefficients de Fourier sont algébriques sur $\mathbb{Q}$.

0.4. L'objet du présent travail est d'explorer, pour les mêmes classes automorphes sur un groupe unitaire en trois variables, l'autre façon naturelle d'aborder ces questions d'algébricité : il s'agit de la restriction à des sous variétés (horizontales), qui sont en fait ici des courbes de Shimura. On explique comment lire la rationalité des 1-formes (essentiellement par intégration sur ces courbes de Shimura). Comme dans l'article [**4**] cela concerne seulement les formes de type holomorphe ou anti-holomorphe. Comme dans [**4**] on utilise de façon essentielle une sorte de transformation de Penrose (introduite dans [**3**]) qui transforme formes modulaires de Picard en classes de cohomologie automorphe.

Des résultats analogues valent certainement pour des groupes plus généraux que $U(2,1)$. Certains autres exemples ont déjà été partiellement étudiés : $U(2,2)$ ([**5**]), $Sp(4)$ ([**14**]).

0.5. Voici le plan de cet article : au paragraphe 1 nous rappelons la définition de la variété de Griffiths-Schmid pour le groupe unitaire en trois variables, donnons son interprétation comme espace de paramètres pour certaines structures de Hodge polarisées, et nous expliquons pour quelles sous-variétés « horizontales » la condition de transversalité de Griffiths est satisfaite. Nous identifions trois types de courbes qui vérifient cette condition et qui sont des courbes de Shimura ; savoir si ce sont les seules courbes horizontales globales est un problème intéressant mais sans doute difficile. Au paragraphe 2 nous rappelons la définition des transformations $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ introduites dans [**3**] et qui transforment formes modulaires de Picard en classes de cohomologie automorphe pour la variété de Griffiths-Schmid. Le paragraphe 3 constitue le coeur de cet article : Pour f une forme de Picard et $\mathcal{C}$ une courbe de Shimura de l'un des trois types précédents, nous relions par une transformation cohomologique $\mathcal{Q}$ la