369

ASTÉRISQUE

2015

DE LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
AUX FORMES AUTOMORPHES (I)

J.-B. BOST, P. BOYER, A. GENESTIER,
L. LAFFORGUE, S. LYSENKO, S. MOREL, B.C. NGÔ, eds.

SUR LE COMPTAGE DES FIBRÉS DE HITCHIN

Pierre-Henri CHAUDOUARD

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 369, 2015

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 82 € ($ 123)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-805-3

Directeur de la publication : Marc Peigné

Astérisque
369, 2015, p. 223–284

SUR LE COMPTAGE DES FIBRÉS DE HITCHIN

par

Pierre-Henri Chaudouard

À Gérard Laumon, à l'occasion de ses soixante ans

Résumé. — On montre que le comptage des fibrés de Hitchin sur une courbe projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps fini s'interprète à l'aide de la variante pour les algèbres de Lie de la formule des traces d'Arthur. On en déduit que ce comptage se ramène à un comptage de fibrés de Hitchin nilpotents. Ce dernier s'exprime naturellement comme une somme d'expressions indexées par les orbites nilpotentes. Pour chaque orbite nilpotente, on formule une conjecture à la Hausel-Rodriguez-Villegas pour l'expression correspondante. On démontre la conjecture en rang au plus trois.

***Abstract* (On the counting of Hitchin bundles).** — We give an interpretation of the counting of Hitchin bundles on a geometrically connected, smooth and projective curve over a finite field in terms of a variant of the Arthur-Selberg trace formula. We deduce that the counting reduces to a counting of nilpotent Hitchin bundles which can be expressed as a sum indexed by nilpotent orbits. For each nilpotent orbit, we state a conjectural formula à la Hausel-Rodriguez-Villegas for the corresponding contribution. We prove the conjecture in rank at most three.

1. Introduction

1.1. Soit C une courbe projective, lisse et connexe sur un corps algébriquement clos k, de genre g. Soit D un diviseur sur C. Un fibré de Hitchin est un couple $(\mathcal{E}, \theta)$ formé d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur C ainsi qu'un homomorphisme $\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(D)$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $e \in \mathbb{Z}$, Nitsure a construit un espace de modules grossier $M(n, e, D)$ qui classifie les fibrés de Hitchin semi-stables (à équivalence convenable près)

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — Primaire : 14D20 ; Secondaire : 11F70, 11F72, 11R39, 22E55.

Mots clefs. — Fibrés de Hitchin, espace de modules des fibrés de Hitchin, fibration de Hitchin, formule des traces d'Arthur-Selberg, formes automorphes.

de rang n et degré e (cf. [**20**]). C'est un schéma quasi-projectif muni d'un morphisme propre (dit de Hitchin) vers l'espace affine

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \oplus \cdots \oplus H^0(C, \mathcal{O}_C(nD)).$$

Pour les besoins de l'introduction, on suppose de plus qu'on est dans la situation suivante :

1. le rang n et le degré e sont premiers entre eux ;
2. soit $\deg(D) > 2g - 2$ soit D est un diviseur canonique.

L'hypothèse 1 entraîne que le schéma $M(n, e, D)$ classifie les classes d'isomorphisme de fibrés de Hitchin semi-stables. L'hypothèse 2 implique que ce schéma est lisse sur k.

1.2. Dans ce paragraphe, on suppose, de plus, que le corps de base est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et que le diviseur D est un diviseur canonique K. La théorie de Hodge non-abélienne fournit un difféomorphisme entre $M(n, e, D)$ et une variété de caractères, qui est la variété affine de certaines représentations « tordues » de dimension n du groupe fondamental de la courbe C (cf. [**14**] en rang 2 et [**21**] pour des résultats généraux). Dans [**13**], Hausel et Rodriguez-Villegas ont entrepris une étude approfondie de cette variété des caractères. En particulier, ils ont réussi à calculer le E-polynôme de cette variété, qui est une spécialisation du polynôme de Hodge mixte. En extrapolant leur résultat, ces auteurs ont obtenu une formule conjecturale pour le polynôme de Hodge mixte de cette variété. Comme une autre spécialisation du polynôme de Hodge mixte est le polynôme de Poincaré, ces auteurs ont *ipso facto* une formule conjecturale pour le polynôme de Poincaré de la variété des caractères et donc pour celui de la variété $M(n, e, K)$ (c'est bien sûr le même). Celle-ci est compatible avec les calculs de Hitchin en rang 2 (cf. [**14**]) et Gothen en rang 3 (cf. [**10**]).

Suite à ces travaux, García-Prada, Heinloth et Schmitt (cf. [**9**]) ont donné un algorithme pour calculer le motif de la variété $M(n, e, K)$. Le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$ agit sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}, \mathcal{E}(D))$ pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur C ; on en déduit une action de $\mathbb{C}^\times$ sur $M(n, e, D)$ par homothétie sur θ. Par un procédé de localisation, il leur suffit d'étudier le lieu des points fixes pour cette action et ce dernier admet une description en termes de chaînes. En rang 4, ils obtiennent une formule explicite pour le motif de $M(4, e, K)$ ce qui leur a permis de vérifier en rang 4 (et petit genre) la conjecture de Hausel et Rodriguez-Villegas. Mentionnons que Mozgovoy [**19**] a donné une version de la conjecture de Hausel et Rodriguez-Villegas qui calcule le motif.

1.3. Supposons que le corps de base k est une clôture algébrique d'un corps fini $\mathbb{F}_q$ et que la courbe C, ainsi que le diviseur D, proviennent par extension des scalaires de ce corps fini. Le schéma $M(n, e, D)$ est alors défini sur $\mathbb{F}_q$. Le groupe multiplicatif agit sur $M(n, e, D)$ et contracte $M(n, e, D)$ sur la fibre en 0 du morphisme de Hitchin qui est propre. Comme $M(n, e, D)$ est lisse sur $\mathbb{F}_q$, un argument d'homotopie combiné au théorème de Deligne montre que la cohomologie de $M(n, e, D)$ est pure. On peut donc déduire les nombres de Betti de $M(n, e, D)$ de la connaissance du nombre de points de $M(n,e,D)$ sur les corps finis $\mathbb{F}_{q^d}$. Le but de cet article est d'initier une approche au comptage des points de $M(n,e,D)$ sur les corps finis.

1.4. Les résultats de cet article. — Notre point de vue est de compter les points sur les extensions finies de $\mathbb{F}_q$ du champ algébrique $\mathcal{M}^{ss}$ des fibrés de Hitchin semi-stables de rang n et degré e. Comme $\mathcal{M}^{ss}$ est une $\mathbb{G}_m$-gerbe au-dessus de l'espace grossier $M(n,e,D)$, les deux comptages sont égaux à un facteur évident près. Le point de vue champêtre présente de nombreux avantages. Tout d'abord, on peut introduire le champ algébrique $\mathcal{M}$ de tous les fibrés de Hitchin (sans condition de stabilité) ainsi que des sous-champs ouverts intermédiaires $\mathcal{M}^{\leqslant T}$ de « T-semi-stabilité » ; les champs $\mathcal{M}^{\leqslant T}$ sont obtenus en bornant l'instabilité des fibrés de Hitchin par un paramètre T qui vit dans un certain réseau de cocaractères. Pour $T=0$, on retrouve le champ $\mathcal{M}^{ss}$. Le champ total $\mathcal{M}$ n'est pas de type fini et l'une des difficultés majeures du comptage est que son nombre de points sur les corps finis n'est pas fini. Par contre, les champs intermédiaires $\mathcal{M}^{\leqslant T}$ sont de type fini.

Le groupoïde des points sur $\mathbb{F}_q$ des champs $\mathcal{M}^{\leqslant T}$ s'interprète selon le point de vue de Weil comme un quotient adélique (pour les adèles de la courbe C). Il en résulte tout naturellement que le nombre de points sur les corps finis du champ $\mathcal{M}^{\leqslant T}$ s'exprime comme une intégrale adélique (cf. l'égalité (4.1.3) du §4.1). Lorsque le paramètre T grossit, le comptage $|\mathcal{M}^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)|$ tend vers l'infini. Cependant, la fonction $T \mapsto \mathcal{M}^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)$ a un comportement remarquablement simple : c'est un quasi-polynôme (c'est-à-dire un polynôme à coefficients périodiques, cf. corollaire 4.5.6). Il en résulte alors que le comptage $|\mathcal{M}^{ss}(\mathbb{F}_q)|$ s'exprime par une intégrale adélique réminiscente de la formule des traces d'Arthur (cf. corollaire 5.2.2). À partir de là, on en déduit le principal résultat de cet article qui est le théorème suivant.

***Théorème 1.4.1* (cf. corollaire 6.1.2)**. — *Supposons que D soit un diviseur canonique ou que l'inégalité* $\deg(D) > 2g-2$ *soit satisfaite. Alors le comptage $|\mathcal{M}^{ss}(\mathbb{F}_q)|$ des fibrés de Hitchin semi-stables dans le cas coprimaire vérifie l'égalité*

$$|\mathcal{M}^{ss}(\mathbb{F}_q)| = q^* J_{nilp}$$

où q^* est une puissance de q explicite et J_{nilp} est la contribution nilpotente d'une fonction test très simple dans (un analogue de) la formule des traces d'Arthur.

On a aussi le résultat suivant.

***Théorème 1.4.2* (cf. corollaire 7.4.4)**. — *On suppose* $\deg(D) \geqslant 2g-2$. *Soit $\mathcal{N}^{ss}$ le champ des fibrés de Hitchin semi-stables $(\mathcal{E},\theta)$ dont l'endomorphisme θ est nilpotent. Alors on a, avec les notations du 1.4.1,*

$$|\mathcal{N}^{ss}(\mathbb{F}_q)| = J_{nilp}.$$