369 ASTÉRISQUE

2015

DE LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
AUX FORMES AUTOMORPHES (I)

J.-B. BOST, P. BOYER, A. GENESTIER,
L. LAFFORGUE, S. LYSENKO, S. MOREL, B.C. NGÔ, eds.

COMPTAGE DE FAISCEAUX l-ADIQUES

Pierre DELIGNE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 369, 2015

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 82 € ($ 123)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-805-3

Directeur de la publication : Marc Peigné

Astérisque
369, 2015, p. 285–312

COMPTAGE DE FAISCEAUX l-ADIQUES

par

Pierre Deligne

À Gérard Laumon, à l'occasion de son soixantième anniversaire

Résumé. — Soient X_0 une courbe projective et lisse sur $\mathbb{F}_q$, S_0 un ensemble fini de points fermés, et soit (X, S) déduit de (X_0, S_0) par extension des scalaires à une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$. La relation entre les représentations automorphes cuspidales (pour $\mathrm{GL}(n)$), et les $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux lisses irréductibles de rang n sur $X_0 - S_0$, montre que le nombre de classes d'isomorphie de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses irréductibles de rang n sur $X - S$, fixées par Frobenius, et de ramification donnée en S, est fini. La formule des traces donne un outil pour le calculer. Dans tous les cas connus, il est donné par une formule réminiscente de la formule de points fixes de Lefschetz. Nous donnons des exemples de son calcul, et une conjecture quant à quelle cohomologie devrait figurer dans la formule de Lefschetz espérée.

***Abstract* (Counting ℓ-adic sheaves).** — Let X_0 be a projective non singular curve over $\mathbb{F}_q$, S_0 a finite set of closed points, and let (X, S) be obtained from (X_0, S_0) by extension of scalars to an algebraic closure of $\mathbb{F}_q$. The relation between cuspidal automorphic representations (for $\mathrm{GL}(n)$), and n-dimensional irreducible smooth $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-sheaves on $X_0 - S_0$, shows that the number of isomorphism classes of n-dimensional irreducible smooth $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-sheaves on $X - S$, fixed by Frobenius, and with given ramification at S, is finite. The trace formula gives tools to compute it. In all known cases, it is given by formula resembling a Lefschetz fixed point formula. We give examples of this, and conjecture which cohomology should appear in the hoped for Lefschetz formula.

1. Introduction

1.1. Soient X_0 une courbe projective, lisse, absolument connexe de genre g, sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p, et X celle qui s'en déduit par extension des scalaires

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 14F20, 14K10, 11F70.
Mots clefs. — Faisceau ℓ-adique, courbe sur $\mathbb{F}_q$, représentation automorphe pour $\mathrm{GL}(n)$, formules de points fixes.

à une clôture algébrique $\mathbb{F}$ de $\mathbb{F}_q$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(\mathbb{F}) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q). \end{tikzcd} \tag{1.1.1}$$

L'endomorphisme de X_0 qui est l'identité sur l'espace topologique sous-jacent, et $f \mapsto f^q$ sur le faisceau structural, est un endomorphisme de $\mathbb{F}_q$-schéma. Nous noterons Frob l'endomorphisme du $\mathbb{F}$-schéma X qui s'en déduit par extension des scalaires. C'est l'*endomorphisme de Frobenius* de X. Fixons un nombre premier $l \neq p$, une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}_l$ de $\mathbb{Q}_l$, et soit E l'ensemble des classes d'isomorphie de $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux lisses irréductibles de rang 2 sur X. L'image inverse par Frob induit une permutation de E. Nous la noterons V.

1.2. Dans l'article [**Dr**], qui reste pour moi aussi mystérieux qu'il y a 31 ans, Drinfeld calcule le nombre de points fixes de $V\colon E \to E$.

Un $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceau $\mathcal{L}_0$ de rang un sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ est déterminé à isomorphisme près par l'unité λ de $\bar{\mathbb{Q}}_l$ telle que le Frobenius géométrique $\mathrm{Fr} \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$ agisse par multiplication par λ sur la fibre de $\mathcal{L}_0$ au point géométrique $\mathrm{Spec}(\mathbb{F})$. La $\mathbb{F}_q$*-torsion* de $\mathcal{F}_0$ sur X_0 par $\mathcal{L}_0$ est le produit tensoriel avec l'image inverse de $\mathcal{L}_0$ sur X_0. Par abus de langage, on dira aussi « $\mathbb{F}_q$*-torsion par* λ ».

Drinfeld utilise que la classe d'isomorphie d'un $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceau lisse $\mathcal{F}$ sur X est fixe par V si et seulement si $\mathcal{F}$ est l'image inverse d'un $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceau $\mathcal{F}_0$ sur X_0, et que, si $\mathcal{F}$ est irréductible, $\mathcal{F}_0$ est unique à $\mathbb{F}_q$-torsion près. Le problème résolu par [**Dr**] devient celui de compter les $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux lisses de rang 2 sur X_0, pris à $\mathbb{F}_q$-torsion près, et en ne considérant que ceux qui sont irréductibles et le restent après image inverse sur X.

En 1981, on disposait presque de la correspondance entre $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux lisses irréductibles de rang 2 sur X_0 et représentations automorphes cuspidales partout non ramifiées pour $\mathrm{GL}(2, k(X_0))$. Grâce à celle-ci, Drinfeld ramenait le problème à une application de la formule des traces pour $\mathrm{GL}(2)$. Cette réduction montre que le nombre cherché est indépendant de l. La formule obtenue par Drinfeld a les propriétés miraculeuses (A) et (B) suivantes.

Pour $n \geq 1$, soit N_n le nombre de points fixes de l'itéré $n^{\text{ième}}$ $V^n\colon E \to E$ de V. Calculer N_n est le problème ci-dessus, avec $X_0/\mathbb{F}_q$ remplacé par $(X_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n})/\mathbb{F}_{q^n}$.

(A) La fonction $n \mapsto N_n$ a la forme

$$N_n = \sum a_i \beta_i^n, \tag{1.2.1}$$

pour des entiers a_i et des nombres de Weil β_i convenables.

Les β_i sont des monômes en q et en les valeurs propres de l'endomorphisme Frob^* de $H^1(X, \bar{\mathbb{Q}}_l)$. Le genre g étant fixé, quels monômes β_i apparaissent et avec quelles multiplicités a_i ne dépend pas de la courbe considérée.

La formule des traces exprime N_n comme somme de plusieurs termes. Pris séparément, ces termes n'ont pas tous la forme (1.2.1).

Soit $\sum$ une surface de Riemann compacte de genre g. Considérons les systèmes locaux d'espaces vectoriels complexes sur $\sum$. Soit M l'espace de modules de ceux qui sont irréductibles de rang 2. L'espace M et l'ensemble E sont vides si $g = 0$ ou 1. Sinon, M est une variété symplectique complexe connexe. Sa dimension complexe est donc un entier pair $2N$.

(B) Dans (1.2.1), le terme dominant est q^N : un des β_i est q^N, sa multiplicité a_i est 1, et les autres β_i vérifient $|\beta_i| < q^N$.

1.3. La formule (1.2.1) est réminiscente d'une formule des traces de Lefschetz où, dans de bons cas, le nombre de points fixes des itérés T^n $(n \geq 1)$ d'un endomorphisme T d'un espace S est

$$\mathrm{Tr}(T^{*n}, H^*_?(S)) := \sum(-1)^i \mathrm{Tr}(T^{*n}, H^i_?(S)). \tag{1.3.1}$$

Le « ? » est là pour rappeler qu'il faut considérer une cohomologie avec conditions de support. Les conditions de support à imposer dépendent du comportement à l'infini de T. Par exemple, si pour une fonction d'exhaustion f sur S on a $f(T(x)) > f(x)$ (resp. $f(T(x)) < f(x)$) pour $f(x)$ assez grand, la cohomologie à considérer est la cohomologie à support compact (resp. ordinaire).

Supposons que $H^*_?$ soit de dimension finie, pour que (1.3.1) ait un sens. Le membre de droite de (1.3.1) est alors de la forme (1.2.1) : c'est $\sum a(\beta)\beta^n$, où β parcourt les valeurs propres de T^* et où l'entier $a(\beta)$ est la somme alternée des multiplicités de β comme valeur propre des endomorphismes T^* des $H^i_?(S)$.

Je n'ai malheureusement aucune idée quant à comment considérer l'ensemble E des classes d'isomorphie de $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceaux lisses irréductibles de rang 2 sur X comme un « espace » ayant une cohomologie $H^*_?(E)$ telle qu'on puisse espérer que le nombre de points fixes de V^n soit donné par une formule du type (1.3.1).

1.4. Même si on ne sait pas comment penser géométriquement à E, si $f \in E$ est la classe d'isomorphie de $\mathcal{F}$, on sait ce que devrait être le complété formel $E^\wedge_f$ de E en f. Une $\bar{\mathbb{Q}}_l$-algèbre locale de dimension finie Λ est augmentée vers $\bar{\mathbb{Q}}_l$. Une *déformation* de $\mathcal{F}$ sur $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ est un $\bar{\mathbb{Q}}_l$-faisceau lisse $\mathcal{F}_\Lambda$ sur X, muni d'une structure de Λ-module et d'un isomorphisme $\mathcal{F}_\Lambda \otimes_\Lambda \bar{\mathbb{Q}}_l \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$, tel qu'en un point x (et donc en tout point x de X), $(\mathcal{F}_\Lambda)_x$ soit un Λ-module libre. Le foncteur en $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ des classes d'isomorphie de déformations de $\mathcal{F}$ sur $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ est proreprésentable. Notons $R_\mathcal{F}$ la $\bar{\mathbb{Q}}_l$-algèbre locale complète de corps résiduel $\bar{\mathbb{Q}}_l$ telle que $\mathrm{Specf}(R_\mathcal{F})$ le proreprésente. Il n'y a pas d'obstruction aux déformations, et $R_\mathcal{F}$ est donc isomorphe à une algèbre de séries formelles $\bar{\mathbb{Q}}_l[\![t_1, \ldots, t_m]\!]$. Parce que $\mathcal{F}$ est irréductible, ses seuls automorphismes sont les multiplications par un $\lambda \in \bar{\mathbb{Q}}_l^*$. Ils se prolongent à toute déformation. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux représentants de la classe d'isomorphie f, deux isomorphismes de $\mathcal{F}$ avec $\mathcal{F}'$ induisent donc le même isomorphisme entre $R_\mathcal{F}$ et $R_{\mathcal{F}'}$: $E^\wedge_f := \mathrm{Specf}(R_\mathcal{F})$ ne dépend, à isomorphisme unique près, que de f.

L'espace tangent de Zariski de $E^\wedge_f$ en f est $H^1(X, End(\mathcal{F}))$. La forme bilinéaire symétrique $\mathrm{Tr}(fg)$ sur $End(\mathcal{F})$ est une autodualité. Elle induit sur $H^1(X, End(\mathcal{F}))$ une forme symplectique à valeurs dans $H^2(X, \bar{\mathbb{Q}}_l) = \bar{\mathbb{Q}}_l(-1)$. La même construction