

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

NOMBRES SELF NORMAUX

Anne Bertrand-Mathis

Tome 141

Fascicule 1

2013

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 25-33

NOMBRES SELF NORMAUX

PAR ANNE BERTRAND-MATHIS

RÉSUMÉ. — Nous inspirant de la construction de Champernowne d'un nombre normal en base 10 nous construisons un ensemble de nombres "self-normaux" au sens de Schmeling ; cet ensemble est non dénombrable et dense dans $[1, \infty[$.

ABSTRACT (*Self-normal numbers*). — Using a method of Champernowne we propose a construction of self-normal numbers in the sense of Schmeling ; these numbers are dense in $[1, \infty[$ and form a non enumerable set.

1. Introduction

Étant donné un nombre $\beta > 1$ on peut écrire tout réel x de $[0, 1[$ en base β sous la forme $x = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{\beta^n}$ avec les conditions de Rényi : $x_n \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \geq 0$, $\sum_{i > n} \frac{x_i}{\beta^i} < \frac{1}{\beta^n}$; cette écriture est unique ; la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est appelée β -développement de x et notée $d_\beta(x)$ [7].

Désignons par $[x]$ et $\{x\}$ les parties entières et fractionnaires d'un réel x ; on a $x_i \in \{0, 1, \dots, [\beta]\}$. Soit T_β la transformation de $[0, 1[$ dans lui-même : $x \mapsto \{\beta x\}$; x_i est alors égal à $[\beta(T_\beta^i(x))]$ et $T_\beta^i = \sum_{k \geq 1} \frac{x_{i+k}}{\beta^k}$ a pour β -développement $(x_{i+1}x_{i+2}x_{i+3} \dots)$; la transformation T_β conserve une unique mesure

Texte reçu le 16 décembre 2009, révisé le 26 novembre 2010, accepté le 20 mai 2011.

ANNE BERTRAND-MATHIS

Classification mathématique par sujets (2010). — 11K, 37D..

Mots clefs. — Nombres normaux, points génériques, numération, systèmes dynamiques symboliques, codes préfixes.

μ_β absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue que nous appellerons mesure de Parry [8]; cette mesure est l'unique mesure T_β -invariante d'entropie maximale $\log \beta$ sur $[0, 1]$.

DÉFINITION 1.1. — On appelle (improprement) β -développement de 1 l'unique suite d'entiers $(a_n)_{n \geq 1}$ notée $d_\beta(1)$ qui vérifie $1 = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\beta^n}$ ainsi que les conditions de Rényi sauf au rang $n = 1$: a_1 est égal à $[\beta]$ et $(a_2 a_3 \dots)$ est le β -développement de $\{\beta\}$; la suite $d_\beta(1)$ est aussi appelée β -développement de β car $\beta = a_1 + \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}}{\beta^n}$.

C'est au β -développements des nombres β que nous nous intéresserons.

Un sous ensemble de $[1, \infty[$ est dit résiduel s'il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses; le complémentaire d'un ensemble résiduel est dit maigre.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ d'un espace métrique E est répartie selon une mesure borélienne μ sur E si pour toute fonction continue de E dans \mathbb{R} on a $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} (f(u_n)) = \mu(f)$.

DÉFINITION 1.2. — Nous dirons qu'un nombre β est autonormal si la suite $\{T_\beta^n(1)\}$ est répartie selon la mesure μ_β .

Schmeling [8] a montré que pour presque tout β au sens de Lebesgue la suite $(T_\beta^n(1))_{n \geq 1}$ est dense dans $[0, 1[$ (l'ensemble des nombres possédant cette propriété est résiduel) et que l'ensemble des nombres autonormaux (ou encore self-normaux), est un ensemble maigre dont la mesure de Lebesgue est aussi égale à 1.

Dans [1] les auteurs remarquent que si presque tout nombre supérieur à 1 est autonormal on n'en connaît aucun exemple.

Nous allons contruire pas à pas des nombres self-normaux selon une méthode Champernownesque (le nombre de Champernowne en base 10 est $x = 0, 123 \dots 9101112 \dots 9899100101 \dots$; il est normal en base 10 [5] (et il est transcendant)) et montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 1.3. — *Le procédé décrit dans la partie 4 permet de construire un ensemble non dénombrable et dense de nombres self-normaux.*

Pour ce faire il nous faut plus d'explications sur les β -développements.

2. Le β -shift

Parry [6] donne la description que voici des β -développements, du β -shift et de la mesure μ_β (voir aussi [2]).

Étant donné deux suites infinies $x = (x_n)_{n \geq 1}$ et $y = (y_n)_{n \geq 1}$ on dira que $x < y$ s'il existe un entier k tel que $x_1 \dots x_k < y_1 \dots y_k$ pour l'ordre lexicographique habituel; ainsi $(32313131\dots) < (323131320000\dots)$.

PROPOSITION 2.1 ([6]). — Une suite $a = (a_n)_{n \geq 1}$ est le β -développement d'un nombre β si et seulement si la suite a vérifie, pour tout $n > 1$ $(a_n a_{n+1} \dots) < (a_1 a_2 \dots)$ On a alors $a_1 = [\beta]$ et si deux suites a et b avec $a < b$ sont les β -développements de deux nombres β , disons β_a et β_b , alors $\beta_a < \beta_b$.

En particulier une suite a qui se termine par des zéros : $a = (a_1 \dots a_n 0000 \dots)$ où a_n est non nul est le β -développement d'un nombre β si et seulement si pour l'ordre lexicographique usuel $a_2 a_3 \dots a_n \leq a_1 a_2 \dots a_{n-1}$; $a_3 a_4 \dots a_n \leq a_1 a_2 \dots a_{n-2}$; \dots ; $a_{n-1} a_n \leq a_1 a_2$; $a_n \leq a_1$; on dit alors que le β -développement de β est $(a_1 \dots a_k)$; l'ensemble des nombres β ainsi obtenus, dits Nombres de Parry simples, est dense dans $[1, \infty[$.

COROLLAIRE 2.2. — Une suite $(a_1 a_2 \dots)$ qui ne se termine pas par des zéros est le β -développement d'un nombre β si et seulement si, pour tout k , la suite $(a_1 \dots a_k)$ est le β_k -développement d'un nombre β_k ; β est alors la limite croissante des β_k (c'est encore vrai s'il existe une sous suite infinie croissante m_k de \mathbb{N} telle que la suite $(a_1 \dots a_{m_k})$ soit le β_k -développement d'un nombre β_k).

Exemple : la suite 21111... est le β -développement d'un nombre β ; les suites qui sont des développements sont celles qui contiennent des 0,1 et 2 et où un 2 est suivi d'un nombre fini de 1 suivi d'un zéro. Pour tout k la suite $a_k = (2(1)^k(0)^\omega)$ définit un β -nombre simple β_k et β est la limite croissante des β_k .

DÉFINITION 2.3. — Étant donné un nombre β de β -développement $(a_n)_{n \geq 1}$, les suites $(x_n)_{n \geq 1}$ qui sont le β -développement d'un nombre $x \in [0, 1[$ sont les suites qui vérifient pour tout $k \geq 1$ $(x_k x_{k+1} \dots) < (a_1 a_2 \dots)$; soit Y leur ensemble.

Étant donné un nombre β de β -développement $(a_n)_{n \geq 1}$ nous dirons qu'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est admissible en base β si pour tout $k \geq 1$ $a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots \leq a_1 a_2 a_3 \dots$; soit X_β leur ensemble.

Y est inclus dans $A = \{0, 1, \dots, [\beta]\}^{\mathbb{N}} = \{0, 1, \dots, a_1\}^{\mathbb{N}}$; la fermeture de Y pour la topologie produit de la topologie discrète sur A est égale à X_β ; on l'appelle le β -shift. X_β est muni de la transformation $T : (x_1 x_2 \dots) \mapsto (x_2 x_3 \dots)$; lorsque $(x_1 x_2 \dots)$ est le β -développement de $x \in [0, 1[$, $(x_2 x_3 \dots)$

est celui de $\{\beta x\}$. Notons que le β -développement de β n'est pas dans Y (il est égal à lui même et non strictement inférieur).

Toute suite finie (appelée mot) $t_1 \dots t_n$ apparaissant dans au moins un β -développement est dite *mot admissible en base β* et on note L_β l'ensemble de ces mots ; pour $(21111(0)^\omega)$ par exemple le mot 111 est admissible, 210211 aussi mais 0022 ne l'est pas. Une suite infinie est admissible si et seulement tous les mots finis qu'elle contient sont admissibles.

Soit f l'application de X_β dans $[0, 1]$ qui à une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ associe $\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{\beta^n}$; $f \circ T = T_\beta \circ f$ et l'image inverse de la mesure μ_β sur $[0, 1]$ est une mesure borélienne T -invariante sur X_β que nous noterons $\bar{\mu}_\beta$.

PROPOSITION 2.4. — *Étant donné un nombre β de β -développement $(a_n)_{n \geq 1}$, dire que la suite $(T_\beta^n(1))$ est répartie selon la mesure μ_β (et donc que β est autonormal) équivaut à dire que chaque mot $t_1 \dots t_k$ admissible en base β apparaît dans la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ avec la fréquence $\bar{\mu}_\beta(E(t_1 \dots t_k))$ où $E(t_1 \dots t_k) = \{(x_n)_{n \geq 1} \in X_\beta ; x_1 \dots x_k = t_1 \dots t_k\}$ ([4, 2]).*

3. Codes préfixes

Étant donné un alphabet A nous appellerons mot sur A une suite finie $x_1 \dots x_k$ sur A ; la *longueur d'un mot* est le nombre de lettres qu'il contient (le mot vide est celui qui ne contient aucune lettre) et le concaténé de deux mots $x_1 \dots x_h$ et $y_1 \dots y_k$ est le mot $x_1 \dots x_h y_1 \dots y_k$; un mot u est dit *préfixe* du mot w s'il existe un mot v tel que $w = uv$ et il est dit *suffixe* de w s'il existe v tel que $w = v$.

Un ensemble C de mots non vides sur A est dit *code préfixe* si aucun mot de C n'est préfixe d'un autre mot de C ; si $u_1 \dots u_l = v_1 \dots v_m$ ou les u_i et v_j sont tous dans le code alors $l = m$ et $u_1 = v_1, \dots, u_l = v_l$. L'ensemble des suites $(t_1 t_2 \dots)$ qui s'écrivent comme produit d'un suffixe éventuellement vide v d'un mot du code suivi d'une suite infinie de mots du code est un sous ensemble T -invariant de $A^\mathbb{N}$ dont la fermeture est un système dynamique. On appelle *message* du code C un produit fini de mots de C ; la longueur d'un message est le nombre de lettres qu'il contient, c'est la somme des longueur des mots du code qui le composent (et non pas le nombre de ces mots). Soit a_n le nombre de mots de longueur n du code ; s'il est borné il existe un nombre réel, disons β , tel que $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\beta^n} = 1$ et le système dynamique associé au code est muni d'une mesure ν ergodique d'entropie $\log \beta$ [4] qui possède la propriété suivante :

PROPOSITION 3.1 ([3]). — *Soit un code C , a_n le nombre de mots de longueur n du code ; supposons a_n bornée ; soit β le nombre réel tel que $1 = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\beta^n}$; si nous alignons les messages de longueur 1 du code, puis ceux de longueur*