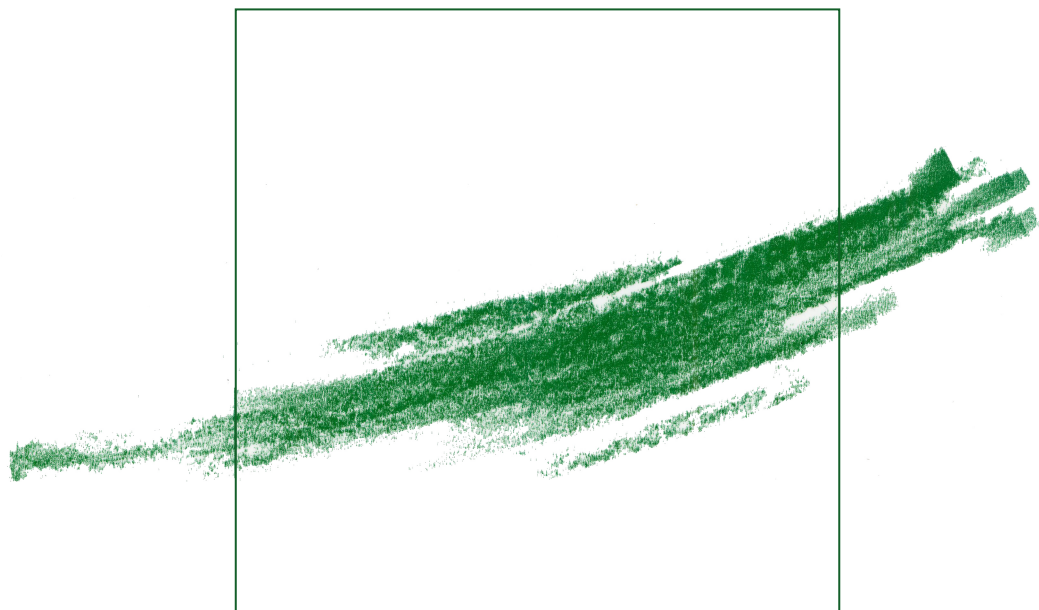


COURS SPÉCIALISÉS
COLLECTION SMF

Transformations birationnelles de petit degré

Dominique CERVEAU & Julie DÉSERTI



19

**TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES
DE PETIT DEGRÉ**

Dominique Cerveau

Julie Déserti

Comité de rédaction

Antoine CHAMBERT-LOIR
Julie DÉSERTI

Bertrand MAURY

Grégory MIERMONT (Directeur)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

EDP Sciences
17, avenue du Hoggar
91944 les Ulis Cedex A
France
www.epdsciences.com

Tarifs

Vente au numéro : 72 € (\$ 108)

Prix membre : 50 €

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Cours Spécialisés

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2013

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-372-0

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

COURS SPÉCIALISÉS 19

**TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES
DE PETIT DEGRÉ**

Dominique Cerveau

Julie Déserti

Société Mathématique de France 2013

À la mémoire de Felice Ronga qui aurait sans doute aimé ce texte,

D. C.

*À ceux dont, par pudeur, je parle peu,
avec une pensée particulière pour celui qui s'est éclipié,*

J. D.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Préliminaires : groupe de Cremona	1
Génération du groupe de Cremona	3
Sous-groupes spéciaux du groupe de Cremona : sous-groupes finis, sous- groupes d'invariance... ..	4
Automorphismes et alternative de Tits : analogie avec les groupes linéaires	7
Propriétés et résultats de nature algébri-co-dynamique	8
Représentations de réseaux dans le groupe de Cremona et applications ...	10
Transformations rationnelles et birationnelles quadratiques	12
Germe de flots birationnels quadratiques	15
Transformations rationnelles, feuilletages, conjugaison dans les Σ^i	16
Quelques propriétés dynamiques des transformations birationnelles quadratiques	17
Des propriétés algébriques du groupe de Cremona	18
Transformations birationnelles de degré 3	19
Remerciements	23
À l'attention du lecteur	23
1. Transformations rationnelles et birationnelles quadratiques	25
1.1. Quelques définitions et notations	25
1.2. Transformations rationnelles quadratiques	27
1.3. Critère de birationnalité	29
1.4. Relations et transformations birationnelles, second critère de birationnalité	34
1.4.1. Calculs explicites d'espaces de relations linéaires	34
1.4.2. Critère de birationnalité	36
1.4.3. Paramétrisation de l'adhérence de Bir_2	39
1.5. Quelques orbites sous l'action gauche-droite	41
1.5.1. Orbites génériques et feuilletage par les orbites	42
1.5.2. Lieu singulier	44
1.5.3. Orbites spéciales	46
1.6. Conditions d'incidence ; lissité de Bir_2 et non lissité de $\overline{\text{Bir}_2}$	48
2. Germes de flots birationnels quadratiques	53

2.1. Généralités sur les germes de flots birationnels quadratiques	53
2.1.1. Quelques rappels utiles	53
2.1.2. Propriétés des germes de flots dans Bir_2	55
2.1.3. Deux résultats sur les germes de flots dans Bir_n	66
2.2. Classification des germes de flots birationnels quadratiques	67
2.2.1. La seconde composante du flot est triviale, <i>i.e.</i> , $\varepsilon = 0$	68
2.2.2. La seconde composante du flot est une translation, <i>i.e.</i> , $\varepsilon = 1$	70
2.2.3. La seconde composante du flot est une homothétie	76
2.2.4. Récapitulatif	88
3. Transformations rationnelles, feuilletages, conjugaison dans les Σ^i	99
3.1. Généralités	99
3.2. Transformations birationnelles quadratiques et feuilletages	103
3.3. Relations de type Lefschetz, Baum-Bott	105
3.4. Conjugaison birationnelle entre éléments de $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$	108
3.5. Conjugaison birationnelle entre éléments de Σ^3	110
3.6. Conjugaison birationnelle entre automorphismes de Hénon	114
4. Quelques propriétés dynamiques des transformations birationnelles quadratiques 117	
4.1. Stabilité algébrique	117
4.2. Feuilletages et courbes invariants pour des transformations du type $A\sigma$..	120
4.2.1. Feuilletages invariants	120
4.2.2. Courbes invariantes	121
4.3. Exemples de transformations quadratiques préservant une fibration rationnelle	133
4.4. Transformations ayant une courbe de points fixes	134
4.5. Points d'indétermination des itérés, points périodiques	137
4.5.1. Points d'indétermination, ensembles exceptionnels	137
4.5.2. Points périodiques	140
4.6. Transformations birationnelles quadratiques de carré quadratique	143
4.6.1. Cas non génériques	148
5. Propriétés algébriques du groupe de Cremona	151
5.1. Le groupe de Cremona ne se plonge pas dans un $\text{GL}_n(\mathbb{k})$	151
5.2. Centralisateur d'une transformation $A\sigma$ générique	152
5.3. Construction de sous-groupes libres	154
5.4. Au sujet de la simplicité	155
5.4.1. Premiers calculs de $N(f, \text{Bir}(\mathbb{P}^2))$ et conséquences	156
5.4.2. Description du sous-groupe normal de $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ engendré par une transformation birationnelle quadratique	157
5.4.3. Calculs de $N(f, \text{Bir}(\mathbb{P}^2))$ dans un cadre un peu plus général	159
5.5. Une version un peu plus forte du Théorème de Nøther	160