PANORAMAS ET SYNTHÈSES 17

UNE INTRODUCTION AUX MOTIFS
(MOTIFS PURS, MOTIFS MIXTES, PÉRIODES)

Yves André

Société Mathématique de France 2004
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique
et du Ministère de la Culture et de la Communication

Y. André
D.M.A., École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, F-75230 Paris cedex 05.
E-mail : `andre@dma.ens.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 14F42, 19E15, 32G20, 11J91.

***Mots clefs.* —** Cycle algébrique, motif pur, motif mixte, théories cohomologiques, groupe de Galois motivique, cohomologie motivique, période.

Du même auteur :

G-functions and geometry, Aspects of Mathematics, vol. E13, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989.

(avec F. Baldassarri) *De Rham cohomology of differential modules on algebraic varieties*, Progress in Mathematics, vol. 189, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

Period mappings and differential equations. From $\mathbb{C}$ *to* $\mathbb{C}_p$, Tôhoku-Hokkaidô lectures in arithmetic geometry, MSJ Memoirs, vol. 12, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2003.

UNE INTRODUCTION AUX MOTIFS
(MOTIFS PURS, MOTIFS MIXTES, PÉRIODES)

Yves André

***Résumé.* —** La théorie des *motifs*, introduite par A. Grothendieck il y a 40 ans et demeurée longtemps conjecturale, a connu depuis une quinzaine d'années des développements spectaculaires. Ce texte a pour objectif de rendre ces avancées accessibles au non-spécialiste, tout en donnant, au cours de ses deux premières parties, une vision unitaire des fondements géométriques de la théorie (pure et mixte). La troisième partie, consacrée aux *périodes* des motifs, en propose une illustration concrète ; on y traite en détail les exemples des valeurs de la fonction gamma aux points rationnels, et des nombres polyzêta.

***Abstract* (An Introduction to Motives (Pure motives, mixed motives, periods))**

Motives have been introduced 40 years ago by A. Grothendieck as "a systematic theory of arithmetic properties of algebraic varieties as embodied in their groups of classes of cycles". This text provides an exposition of the geometric foundations of the theory (pure and mixed), and a panorama of major developments which have occurred in the last 15 years. The last part is devoted to a study of *periods* of motives, with emphasis on examples (polyzeta numbers, notably).

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos ix

Partie I. Motifs purs

1. Sources: géométrie énumérative, cohomologie, théorie de Galois ... 3
1.1. Géométrie énumérative 3
1.2. Cohomologie des variétés algébriques 6
1.3. Théorie de Galois 9

2. $\otimes$-Catégories rigides, catégories tannakiennes 11
2.1. Introduction 11
2.2. $\otimes$-Catégories rigides 12
2.3. Catégories tannakiennes 14

3. Cycles algébriques et cohomologies (cas des variétés projectives lisses) 17
3.1. Cycles algébriques et relations adéquates 17
3.2. Revue des relations adéquates classiques 19
3.3. Cohomologies de Weil 23
3.4. Revue des cohomologies de Weil classiques 27

4. Motifs purs de Grothendieck 31
4.1. Construction 31
4.2. Fonctorialités et premières propriétés 35
4.3. Exemples 38
4.4. $\otimes$-Idéaux et équivalences adéquates 42
4.5. Semi-simplicité des motifs numériques à coefficients dans un corps 44

5. Les conjectures standard 47
5.1. Projecteurs de Künneth et poids 47
5.2. Polarisations I (Lefschetz) 50
5.3. Polarisations II (Hodge) 55
5.4. Équivalences homologique et numérique, et relations entre les conjectures standard 56

6. Groupes de Galois motiviques 61
6.1. Conjecture des signes et modification de la contrainte de commutativité 61
6.2. Réalisation de Betti et groupes de Galois motiviques 63
6.3. Groupes de Galois motiviques et invariants 65

7. Les conjectures de plénitude et de semi-simplicité des réalisations enrichies 67
7.1. Foncteurs de réalisation enrichis 67
7.2. La conjecture de Hodge 74
7.3. La conjecture de Tate 76
7.4. La conjecture d'Ogus 79
7.5. La conjecture des périodes de Grothendieck 82
7.6. Techniques de calcul de groupes de Galois motiviques 85

8. Effectivité 89
8.1. Effectivité et coniveau 89
8.2. Conjectures de Hodge et Tate généralisées 90

9. Comment contourner les conjectures standard 93
9.1. Deux manières de contourner les conjectures standard (aperçus) 93
9.2. Par excès: cycles et correspondances motivés 95
9.3. Par défaut: $\otimes$-scindage du passage au numérique 97

10. Applications de la théorie des cycles motivés 101
10.1. Transport parallèle de cycles motivés 101
10.2. Cycles de Hodge et cycles de Tate sur les variétés abéliennes 103
10.3. Variation du groupe de Galois motivique dans une famille 105

11. Filtrations sur les anneaux de Chow et nilpotence 109
11.1. Introduction: application d'Abel-Jacobi pour les 0-cycles 109
11.2. Conjectures de Bloch-Beilinson-Murre 111
11.3. Filtration de Saito et équivalences séparées 113
11.4. Le cas d'un corps de base fini 116
11.5. Conjecture de nilpotence de Voevodsky 116

12. Structure de la catégorie des motifs purs pour une équivalence adéquate quelconque 119
12.1. Catégories de Kimura-O'Sullivan 119
12.2. Lien entre motifs de Chow et groupes de Galois motiviques (aperçu de la théorie de O'Sullivan) 124

13. Motifs purs virtuels attachés aux k-variétés (transition vers la mixité) 127
13.1. Le jeu de Boole des k-variétés 127
13.2. Le motif virtuel d'une k-variété 128
13.3. Fonctions zêta motiviques 129

Partie II. Motifs mixtes

14. Pourquoi des motifs mixtes? ... 135
14.1. La filtration par le poids ... 135
14.2. Des motifs purs aux motifs mixtes ... 137
14.3. L'idée de cohomologie motivique ... 139

15. Le formalisme élémentaire des morphismes multivalués ... 143
15.1. Correspondances finies entre variétés lisses et transferts ... 143
15.2. Une construction de Suslin-Voevodsky ... 144
15.3. La catégorie $c\mathcal{L}(k)$ ... 145
15.4. Homologie de Suslin ... 146

16. Motifs mixtes de Voevodsky ... 149
16.1. Complexes dans $c\mathcal{L}(k)$ ... 149
16.2. La catégorie triangulée $DM_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(k)$ ... 151
16.3. Triangles de Mayer-Vietoris ... 154

17. Twists et cohomologie motivique ... 157
17.1. Twists et définition de $DM_{\mathrm{gm}}(k)$ ... 157
17.2. La cohomologie motivique ... 159
17.3. Première classe de Chern d'un fibré en droites et formule du fibré projectif ... 161

18. Propriétés fondamentales de $DM_{\mathrm{gm}}(k)$ ... 163
18.1. Éclatements et triangle de Gysin ... 163
18.2. Simplifiabilité des twists ... 164
18.3. Lien avec les motifs de Chow ... 164
18.4. Dualité ... 165
18.5. Comparaison avec les groupes d'homologie de Suslin, avec les groupes de Chow supérieurs et avec la K-théorie ... 167

19. Complexes de faisceaux motiviques ... 169
19.1. Préfaisceaux avec transferts et invariance par homotopie ... 169
19.2. Topologie de Nisnevich et transferts ... 172
19.3. Le théorème de plongement ... 175
19.4. Nouvelle description de la cohomologie motivique ... 176

20. Exemples: 1-motifs et motifs de Tate mixtes ... 179
20.1. 1-Motifs ... 179
20.2. Motifs de Tate mixtes ... 180
20.3. Motifs de Kummer ... 182

21. Vers le cœur de $DM_{\mathrm{gm}}(k)$ ... 183
21.1. En quête de $MM(k)$. Problèmes de t-structure et peines de cœur ... 183
21.2. Motifs des variétés affines lisses et « théorème » de Lefschetz faible en cohomologie motivique ... 187

21.3. Motifs mixtes et conjectures de Bloch-Beilinson-Murre 188
21.4. La catégorie abélienne des motifs mixtes de Nori 189

22. Réalisations mixtes et régulateurs 191
22.1. Réalisations de De Rham-Betti, de Hodge, et de Tate 191
22.2. Régulateurs 193
22.3. Propriétés attendues des réalisations de $MM(k)$ 194
22.4. Valeurs de fonctions L, périodes, régulateurs 196

Partie III. Périodes

23. Relations de périodes 201
23.1. Retour sur la conjecture des périodes de Grothendieck 201
23.2. Estimation du degré de transcendance de certains sous-corps du corps des périodes 204
23.3. Extension au cas mixte 206
23.4. Extension au cas d'un corps de base transcendant 207
23.5. Vers une théorie de Galois pour des nombres transcendants? 209

24. Motifs et valeurs spéciales de la fonction Γ 211
24.1. Valeurs de Γ et périodes d'intégrales abéliennes 211
24.2. Distributions et relations de distribution 213
24.3. Types CM et motifs de type CM 215
24.4. Nature motivique des relations monomiales de Shimura 218
24.5. Da capo: valeurs de Γ comme périodes de Shimura 220
24.6. Conjecture de Rohrlich-Lang et conjecture des périodes 222

25. Motifs et nombres polyzêta 225
25.1. Nombres polyzêta et périodes de motifs de Tate mixtes 225
25.2. Relations de double mélange régularisé 228
25.3. Relations de l'associateur 230
25.4. Conjectures sur l'algèbre des nombres polyzêta 231
25.5. Motifs de Tate mixtes sur $\mathbf{Z}$, et leur groupe de Galois motivique 232
25.6. Interlude: conjectures de Hodge et Tate pour $MTM(\mathbf{Z})$ 234
25.7. Nombres polyzêta et conjecture des périodes de Grothendieck 235
25.8. Nature motivique des relations de double mélange régularisé 238
25.9. Nature motivique des relations de l'associateur 241

Bibliographie 245

Index terminologique 259

AVANT-PROPOS

Beaucoup de disciplines ont adopté dans leur vocabulaire technique le terme de *motif*, avec l'un ou l'autre de ses sens courants : celui de « raison » (à connotation subjective) et celui d'« élément constitutif ».

En introduisant ce terme en Géométrique Algébrique il y a 40 ans, A. Grothendieck jouait de ses deux sens à la fois. Il s'agissait de dégager le *motif* commun à divers phénomènes cohomologiques (par exemple les notions, transcendante ou arithmétique, de poids), ou encore le *motif* expliquant certaines relations mystérieuses entre intégrales de fonctions algébriques à une ou plusieurs variables, *etc.* Il s'agissait par ailleurs de décomposer, du point de vue cohomologique, les variétés algébriques en *motifs* simples susceptibles d'être recombinés.

L'intuition fondamentale de Grothendieck était que cette chimie des motifs était réglée par la théorie des correspondances algébriques. Les motifs devaient former une sorte de cohomologie universelle purement algébrique dont toutes les autres cohomologies se déduiraient, comme autant de « réalisations » différentes, et devaient donner lieu à une sorte de généralisation de la théorie de Galois aux systèmes de polynômes à plusieurs variables.

On peut distinguer trois périodes dans l'évolution de la théorie. Jusqu'à la fin des années 70, elle se réduisait essentiellement au corpus grothendieckien conjectural des motifs purs, tel qu'il est exposé à la fin du livre de Saavedra [**Saa72**]. On ne référait guère à ce morceau de « science-fiction mathématique » que comme source d'inspiration.

Les années 80 ont connu des progrès de deux ordres. D'une part, l'obtention de résultats inconditionnels, quitte à sacrifier la notion même de motif au profit de celle de système de réalisations. D'autre part, la mise en place d'un programme grandiose pour une théorie générale des motifs mixtes, et l'idée-clé de cohomologie motivique. Les conjectures de Deligne, Beilinson et Bloch-Kato sur les liens entre valeurs de fonctions L et régulateurs ont beaucoup popularisé la théorie des motifs auprès des arithméticiens. Ces développements ont été exposés dans l'ouvrage collectif de référence intitulé *Motives* (conférence de Seattle de 1991, AMS).

Avec le recentrage sur les correspondances algébriques, les années suivantes ont été celles de véritables percées qui ont donné à la théorie des assises non conjecturales, tant dans le domaine des motifs purs — à partir de la démonstration de la conjecture de semi-simplicité des motifs numériques — que dans celui des motifs mixtes, où la théorie de la cohomologie motivique semble parvenue à maturité(1).

Notre propos est de rendre ces avancées accessibles au non-spécialiste, tout en tâchant de donner, au cours des deux premières parties, une vision unitaire de la théorie(2). La troisième partie en est une illustration particulièrement concrète qui pourrait aussi intéresser les spécialistes des nombres transcendants. Nous avons cherché à mettre l'accent sur les aspects structurels, à hiérarchiser et à mettre en valeur la cohérence et la complémentarité des nombreuses conjectures qui forment l'armature idéale au sein de laquelle continue de s'échafauder la théorie.

Yves André,

Paris, le 10 Septembre 2004.

(1)assez pour avoir permis l'attaque des conjectures de Milnor-Bloch-Kato.

(2)en nous limitant pour l'essentiel aux aspects géométriques et catégoriques ; il sera peu question de fonctions L, et rien ne sera dit sur les relations avec « la philosophie de Langlands » [**La79**].

Remerciements. — La tâche serait trop lourde de faire ici la liste de mes dettes intellectuelles, à commencer bien entendu par celles envers les travaux fondateurs d'A. Grothendieck et de P. Deligne. Cette liste devrait transparaître à la lecture du texte.

Sur un plan plus concret, cet ouvrage doit beaucoup à Bruno Kahn et Fabien Morel, à plusieurs titres. Le projet est né lors du groupe de travail sur les motifs que nous organisions ensemble (et avec G. Maltsiniotis) à Jussieu-Chevaleret, et c'est au cours de nombreuses et passionnantes conversations avec eux que je me suis familiarisé avec l'essentiel du contenu de la seconde partie, avant de me plonger dans les textes originaux. Il avait d'ailleurs été envisagé que F. Morel soit l'auteur de cette partie ; il a préféré y renoncer, tout en me laissant des notes préliminaires dont je me suis fort inspiré dans la rédaction des chapitres 15 à 17. B. Kahn m'a fait part de nombreux commentaires critiques très utiles concernant tant la première partie — dont certains passages s'inspirent de nos travaux en collaboration — que la seconde.

Je remercie aussi Pierre Lochak pour sa lecture critique d'une première version du dernier chapitre du livre, ainsi que Peter O'Sullivan et Jean-Benoît Bost pour leurs commentaires.

Notations et conventions. — Nous avons tâché d'appliquer le rasoir d'Ockham à nos universaux et à leur notation. De nombreuses catégories de nature géométrique seront notées avec un suffixe (k) ou $(k)_F$; dans une telle notation, k désignera toujours le corps de *base* de la géométrie, F l'anneau de *coefficients* de la catégorie.

Si A et B sont deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}(A,B)$ désigne l'ensemble des morphismes de A vers B dans $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ la catégorie opposée de $\mathcal{C}$: $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(A,B) = \mathcal{C}(B,A)$.

$\mathcal{C}$ est dite F-linéaire si les ensembles de morphismes sont des F-modules, si leur composition est F-linéaire, et si $\mathcal{C}$ admet des sommes directes finies. Les foncteurs entre catégories F-linéaires sont supposés F-linéaires (sur les ensembles de morphismes) ; ils respectent les sommes directes, à isomorphisme naturel près.

On rappelle qu'un foncteur est dit plein (resp. fidèle, resp. pleinement fidèle) s'il est surjectif (resp. injectif, resp. bijectif) sur les ensembles de morphismes.

PARTIE I

MOTIFS PURS

CHAPITRE 1

SOURCES : GÉOMÉTRIE ÉNUMÉRATIVE, COHOMOLOGIE, THÉORIE DE GALOIS

Dans ce chapitre « heuristique », nous présentons librement, sans souci d'exhaustivité, quelques fils conducteurs qui mènent aux motifs. Il ne s'agit pas d'une reconstruction historique de la naissance de la théorie, et les notions qui y apparaissent seront reprises en détail dans les chapitres ultérieurs.

1.1. Géométrie énumérative

1.1.1. L'un des résultats les plus anciens et élémentaires en géométrie projective énumérative est le théorème de Bézout[(1)] sur le nombre de points communs à deux courbes planes sans composante commune : si les courbes sont les lieux des zéros des polynômes $P(x,y)$, $Q(x,y)$ respectivement, le nombre de points communs, comptés avec multiplicité et en tenant compte des points à l'infini, est $\deg P \cdot \deg Q$. Poncelet[(2)] a proposé une approche « dynamique » de ce théorème, en déformant Q en un produit de facteurs linéaires $\Pi(a_i x + b_i y)$ en position générale (il est alors clair que chacune des $\deg Q$ droites $a_i x + b_i y$ coupe « $P = 0$ » en $\deg P$ points), et en utilisant son « principe de conservation du nombre ».

Une formulation moderne de ce principe est que l'équivalence algébrique des cycles algébriques, et *a fortiori* l'équivalence rationnelle, est plus fine que l'équivalence numérique. Rappelons brièvement ici les définitions.

Un *cycle algébrique* sur une variété projective lisse X est une combinaison linéaire formelle finie $Z = \sum n_i Z_i$ de sous-variétés irréductibles Z_i de X à coefficients n_i entiers (ou rationnels, selon le contexte). Deux cycles Z et Z' sont dits *rationnellement équivalents* (ce qu'on note $Z \sim_{\mathrm{rat}} Z'$) s'ils peuvent être transformés l'un en l'autre par une succession de déformations rationnelles, *i.e.* paramétrées par la droite projective $\mathbb{P}^1$. Ils sont dits *algébriquement équivalents* (ce qu'on note $Z \sim_{\mathrm{alg}} Z'$) s'ils

---

(1) (1779), mais énoncé avant lui par MacLaurin (1720).

(2) Traité des propriétés projectives des figures (1822).