Revue d'histoire des mathématiques,
7 (2001), p. 161–205.

ALGÈBRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET GÉOMÉTRIE DES OVALES CARTÉSIENNES

Évelyne BARBIN et René GUITART (*)

RÉSUMÉ. — Les recherches sur les ovales au XIX$^{\text{e}}$ siècle témoignent du renouveau des méthodes géométriques et illustrent la mise en concurrence de ces méthodes avec les calculs analytiques. En particulier, elles interviennent dans les relations entre l'algèbre des fonctions elliptiques et la géométrie des courbes, que les mathématiciens pensent en termes d'application ou d'interprétation d'un domaine dans l'autre. La rectification des ovales en arcs d'ellipses est obtenue dans les années 1850 par Roberts et Genocchi, de manière calculatoire, puis de nouveau démontrée une dizaine d'années plus tard par Mannheim et Darboux, de manière géométrique. Les relations profondes entre fonctions elliptiques et ovales cartésiennes sont établies en 1867, avec les démonstrations géométriques du théorème d'addition des fonctions elliptiques de Darboux et de Laguerre. En prouvant l'orthogonalité des systèmes d'ovales homofocales, Darboux montre aussi que les ovales fournissent une interprétation géométrique du théorème d'addition et qu'elles constituent la forme algébrique de l'intégrale solution. Laguerre démontre le théorème d'addition à l'aide des courbes anallagmatiques, *via* le théorème de Poncelet sur les polygones inscrits et circonscrits à deux coniques. Les travaux sur la représentation des fonctions elliptiques procurent un autre point de vue. Dans les années 1880, Greenhill démontre que les fonctions elliptiques de Jacobi et de Weierstrass sont représentées par des quartiques bicirculaires, dont font partie les ovales, et il applique le formulaire elliptique pour démontrer, en particulier, l'orthogonalité des systèmes d'ovales homofocales. Dans son article de 1913, Clara Bacon a le souci, à la fois, d'établir les propriétés géométriques des ovales à partir de la fonction de Weierstrass et d'interpréter géométriquement l'algèbre des fonctions elliptiques à l'aide des ovales.

ABSTRACT. — ALGEBRA OF ELLIPTIC FUNCTIONS AND GEOMETRY OF CARTESIAN OVALS. — Researches on cartesian ovals over the course of the 19th

---

(*) Texte reçu le 8 juillet 2000, révisé le 28 juin 2001.
Évelyne BARBIN , REHSEIS, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.
René GUITART, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7, 2 place Jussieu 75251 Paris Cedex 05. Courrier électronique : guitart@math.jussieu.fr

Mots clés : fonctions elliptiques, algèbre des fonctions elliptiques, théorème d'addition, courbes anallagmatiques, ovales cartésiennes, ovales homofocales, théorème de Poncelet.
Classification AMS : 01A55, 33E05, 33-03

century attest to the revival of geometrical methods and illustrate a competition between these methods and analytic calculations. In particular, they played a part in the relations between the algebra of elliptic functions and the geometry of curves, which mathematicians saw in terms of application or of interpretation of one field in terms of another. In 1850, Roberts and Genocchi obtained rectifications of ovals with arcs of ellipses through formal computations; some ten years later, Mannheim and Darboux proved them again using geometrical reasoning. Deep relations between elliptic functions and cartesian ovals were also established in 1867, with the geometrical proofs of the addition theorem of elliptic functions given by Darboux and Laguerre. When Darboux proved the orthogonality of systems of homofocal ovals, he also showed that ovals provide a geometrical interpretation of the addition theorem, and that they constitute the algebraic form of the integral solution. Laguerre, on the other hand, proved the addition theorem with the help of analagmatic curves using Poncelet's theorem on inscribed and circumscribed polygons in two conics. Works on the representation of elliptic functions provide yet another point of view. In the 1880s, Greenhill proved that the elliptic functions of Jacobi and Weierstrass could be represented by bicircular quartics, a special case of which are ovals. In particular, he used the elliptic formula to prove the orthogonality of systems of homofocal ovals. In her paper of 1913, Clara Bacon both established geometrical properties of ovals from Weierstrass's function and interpreted geometrically the algebra of elliptic functions with the help of ovals.

Charles Hermite écrit dans l'introduction de son *Cours d'analyse de l'École polytechnique* de 1873 : « Les éléments des mathématiques présentent deux divisions bien tranchées : d'une part, l'Arithmétique et l'Algèbre ; de l'autre, la Géométrie. Rien de plus différent, à leur début, que les considérations et les méthodes propres à ces deux parties d'une même science [...]. Ce double point de vue de l'Algèbre et de la Géométrie se retrouve dans le Calcul différentiel et le Calcul intégral ; on peut dire en effet de ces nouvelles branches de Mathématiques qu'elles sont comme une Algèbre plus vaste et plus féconde, appliquées à des questions de Géométrie inaccessibles au calcul élémentaire, telles que la quadrature des courbes, la détermination des volumes limités par des surfaces quelconques, la rectification des courbes planes ou gauches, etc. » [Hermite 1873, p. 1]. Hermite termine par le problème de la rectification des courbes, qui est lié à l'introduction des intégrales elliptiques. Notre propos est justement d'examiner le « double point de vue » de l'algèbre et de la géométrie dans l'histoire des fonctions elliptiques.

Parler d'algèbre et de géométrie à propos des fonctions elliptiques pourra étonner un lecteur moderne. La confrontation de deux ouvrages sur les fonctions elliptiques, distants d'un quart de siècle, rend compte de ce sentiment. Dans celui de Cayley de 1876, *An Elementary Treatrise* *on Elliptic Functions*, nous trouvons la signification géométrique des fonctions elliptiques, avec des problèmes de rectifications de courbes, et le traitement algébrique des fonctions elliptiques, avec de nombreux formulaires reliant ces fonctions [Cayley 1876]. Dans celui de Whittaker et Watson de 1902, *A Course of Modern Analysis*, nous ne trouvons plus, ni courbes, ni formulaires [Whittaker et Watson 1902]. Notre propos historique ira ici à l'encontre de cet effacement *a posteriori*, par un examen des relations que des mathématiciens établissent, de 1860 jusque vers 1910, entre l'algèbre des fonctions elliptiques et la géométrie des ovales cartésiennes, en termes d'application ou d'interprétation d'un domaine dans l'autre.

Descartes introduit les ovales dans les années 1630, il les décrit dans *La géométrie* de 1637 par mouvement et par relation algébrique. Quételet les remet à l'honneur deux siècles plus tard, il en étudie les propriétés et il en donne deux descriptions géométriques [Barbin et Guitart 1998]. Les premières rectifications des ovales cartésiennes sont données dans les années 1850 par Roberts et Genocchi, qui montrent que les arcs d'ovales s'expriment à l'aide d'arcs d'ellipses. Elles sont obtenues à partir de l'équation polaire de l'ovale, comme « faits de calcul ». Depuis le début du XIX^e siècle, des mathématiciens, comme Monge, Poncelet et Chasles, ont introduit de nouvelles approches géométriques, qui sont mises en concurrence avec les calculs analytiques. Aussi, les résultats de Roberts et Genocchi sont à nouveau démontrés, une dizaine d'années plus tard, par Darboux et Mannheim, à partir des descriptions géométriques des ovales de Quételet. Pour leurs auteurs, la production et la publication de démonstrations géométriques répondent au désir de donner une explication « philosophique » aux calculs.

Cet esprit est aussi celui qui inspire les recherches de démonstrations géométriques du théorème d'addition des fonctions elliptiques par Darboux et Laguerre. En 1864, Darboux et Moutard exhibent des systèmes de surfaces orthogonales du quatrième degré et introduisent deux notions équivalentes de courbe du quatrième degré, celle de courbe cyclique pour le premier et celle de courbe anallagmatique pour le second. Ces courbes correspondent à un élargissement des deux descriptions géométriques de Quételet et elles se transforment par projections stéréographiques en ovales cartésiennes. Lorsqu'en 1867, Darboux prouve l'orthogonalité des systèmes d'ovales homofocales, il montre aussi que les ovales fournissent une interprétation géométrique du théorème d'addition et, surtout, qu'elles constituent la forme algébrique même de l'intégrale solution. La même année, Laguerre démontre le théorème d'addition à l'aide des courbes anallagmatiques, *via* le théorème de Poncelet sur les polygones inscrits et circonscrits à deux coniques. De la sorte, il emprunte le chemin inverse de celui de Jacobi qui, en 1828, veut appliquer les fonctions elliptiques au problème de Poncelet.

Les travaux sur la représentation des fonctions elliptiques procurent un autre point de vue sur les relations entre ovales et fonctions elliptiques. À partir de 1869, les mathématiciens anglophones s'intéressent aux courbes du quatrième degré introduites par Casey sous le nom de quartiques bicirculaires, car elles ont les points cycliques comme points doubles. Ces courbes sont identiques à celles de Darboux et de Moutard, mais la postérité anglophone les connaîtra sous le nom de Casey. Les ovales font partie des quartiques bicirculaires qui ont les points cycliques comme points de rebroussement. Dans les années 1880, Greenhill démontre que les fonctions elliptiques de Jacobi et de Weierstrass peuvent être représentées par des quartiques bicirculaires. Il en déduit, à partir du formulaire elliptique, des propriétés géométriques de ces courbes, en particulier l'orthogonalité d'un système d'ovales homofocales. Son chemin va donc à l'inverse de celui de Darboux. Celui que prend Bacon en 1913 est à double sens, car elle a le souci, à la fois, d'établir les propriétés géométriques des ovales à partir de la fonction $\wp$ de Weierstrass et d'interpréter géométriquement l'algèbre des fonctions elliptiques à l'aide des ovales.

ALGÈBRE DES ARCS DE COURBES, GÉOMÉTRIE DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES ET FORMULAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

Dans la seconde moitié du XVII^{e} siècle, des rectifications de courbes, comme celle de l'ellipse, et des problèmes physico-mathématiques conduisent les mathématiciens à des intégrales qu'ils ne savent pas résoudre, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas ramener à des courbes algébriques ou logarithmiques, et qu'ils appellent intégrales transcendantes[1]. Ainsi, en 1694, Jacques Bernoulli recherche la courbe élastique, c'est-à-dire la courbe formée par une lame élastique attachée à une de ses extrémités à un plan perpendiculaire et ayant un poids suspendu à l'autre extrémité. Il lui est impossible d'intégrer l'équation à laquelle il est conduit, ni celle qui donne la rectification de la courbe élastique :

$$\mathrm{d}s = \frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^4 - x^4}}\cdot$$

Pour résoudre le problème, il cherche une courbe algébrique dont la rectification se ramène à celle de la courbe élastique et il trouve la courbe lemniscate.

Cet épisode historique et les travaux ultérieurs sur la rectification de la lemniscate sont exemplaires de la manière dont les mathématiciens du XVIII^e^ siècle considèrent les intégrales transcendantes. Nous pouvons analyser leurs travaux comme quatre tentatives pour circonscrire et pour régler algébriquement le monde des intégrales transcendantes. Premièrement, il s'agit, comme pour Bernoulli, d'interpréter une intégrale transcendante comme la rectification d'une courbe algébrique. C'est dans cet esprit qu'Hermann donne en 1723 un raisonnement de géométrie infinitésimale pour ramener une quadrature, à une quantité algébrique près, à la rectification d'une courbe algébrique[2]. Ce résultat est retrouvé par Legendre dans son *Traité des fonctions elliptiques* [Legendre 1825, p. 591]. Deuxièmement, il s'agit d'établir des relations algébriques entre des arcs d'une même courbe, bien que ces arcs s'expriment par des intégrales transcendantes, ce qui conduit aux « théorèmes d'addition » des intégrales elliptiques. Ainsi, dans un article de 1761, Euler [1761] montre que l'intégrale générale de

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - y^4}}$$

est donnée par l'équation algébrique

$$x^2 + y^2 + c^2x^2y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1 - c^4},$$

[1] Sur l'histoire des intégrales elliptiques, voir par exemple l'ouvrage de M. Kline [1972, p. 411–422] et le mémoire de C. Houzel [1978].

[2] Le résultat est publié dans les *Acta eruditorum* de 1723, p. 174, cité dans [Allégret 1873].