Astérisque

ROBERT AZENCOTT

Une approche probabiliste du théorème de l'indice (Atiyah-Singer)

Astérisque, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki, exp. nº 633, p. 7-18

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__7_0>

Séminaire BOURBAKI
37e année, 1984-85, n° 633 Novembre 1984

UNE APPROCHE PROBABILISTE DU THÉORÈME DE L'INDICE (ATIYAH-SINGER)

[d'après J.-M. Bismut]

par Robert AZENCOTT

1. Glossaire : structure spin et opérateur de Dirac

1.1. Spineurs : Soit V un espace euclidien de dimension $n=2k$. Soit $J \in \mathrm{End}(V)$, antisymétrique, tel que $J^2=-I$. On a alors $V = W \oplus JW$ avec $\dim W = k$ et V est $\mathbb{R}$-isométrique au complexifié $\widetilde{W}$ de W, muni du produit scalaire hermitien évident.

L'algèbre extérieure complexe $S = \Lambda(\widetilde{W})$, de dimension 2^k sur $\mathbb{C}$, munie du produit scalaire hermitien usuel s'écrit $S = S^+ \oplus S^-$, où S^+ (resp. S^-) est formé des éléments de degré pair (resp. impairs) ; l'espace hermitien S est celui des *spineurs* en dimension n.

1.2. L'algèbre de Clifford : Pour $v \in V$ la *multiplication de Clifford* $A_v \in \mathrm{End}(S)$ s'écrit $A_v = \mathcal{M}_v - \mathcal{M}_v^*$, où $\mathcal{M}_v$ est la multiplication extérieure par v, et vérifie $A_v^2 = -\|v\|^2 I$. Les A_v, $v \in V$ engendrent une sous-algèbre réelle Cl_n de $\mathrm{End}(S)$, l'*algèbre de Clifford*. La sous-algèbre Cl_n^+ de Cl_n engendrée par les produits d'ordre pair $A_{v_1}A_{v_2}\ldots A_{v_{2r}}$, $r \le k$, laisse S^+ et S^- *invariants*.

1.3. Le groupe $G = \mathrm{Spin}(n)$: C'est le groupe des $g \in Cl_n^+$ vérifiant $g^*g = gg^* = I$, et $gA_vg^{-1} = A_{\sigma(g).v}$ pour tout $v \in V$, avec $\sigma(g) \in \mathrm{End}(V)$. On sait que σ est un homomorphisme de G sur $SO(n)$ de noyau réduit à deux éléments.

1.4. Structure spin : Soit M *une variété riemannienne*, compacte, connexe, orientée, de classe C^∞ et de dimension $n = 2k$. Soit $N \xrightarrow{\pi} M$ le fibré des repères orthonormés orientés sur M. Supposons M *munie d'une structure spin*, c'est-à-dire d'un fibré principal $\overline{N} \xrightarrow{\overline{\pi}} M$ de groupe structurel G avec la factorisation $\overline{\pi} = \pi \circ \overline{\sigma}$ où $\overline{\sigma} : \overline{N} \to N$ vérifie $\overline{\sigma}(\overline{u}g) = \overline{\sigma}(\overline{u})\sigma(g)$ pour tout $\overline{u} \in \overline{N}$, $g \in G$.

Comme G opère à gauche sur les espaces de spineurs S, S^+, S^-, on définit *trois fibrés vectoriels hermitiens* F, F^+, F^- par $F = (\overline{N} \times S)/G$ etc... Chaque $\overline{u} \in \overline{N}$ s'identifie à une isométrie de S sur la fibre F_x en $x = \overline{\pi}(\overline{u})$, telle que $\overline{ug}.v = \overline{u}.gv$ pour tout $g \in G$, $v \in S$. De plus $\overline{u}$ envoie S^+, S^- sur F_x^+, F_x^-. De même les $u \in N$ sont des isométries de $\mathbb{R}^n$ sur T_xM avec $x = \pi u$.

1.5. Un fibré auxiliaire : Soit ξ *un fibré vectoriel hermitien* quelconque sur M , de dimension ℓ . Sur le fibré X des repères unitaires de ξ , de groupe structurel $U(\ell)$, on choisit une connexion arbitraire λ ; on munit le fibré produit $\overline{N} \times_M X$ du produit de la connexion de Levi-Civita sur $\overline{N}$ par la connexion λ . On note ∇ *l'opérateur de dérivée covariante* sur le fibré $F \otimes \xi$, et $\Gamma(Z)$ *l'ensemble des sections* C^∞ d'un fibré quelconque Z .

1.6. Opérateur de Dirac à coefficients dans ξ : C'est l'opérateur différentiel D , d'ordre 1, agissant sur les sections f de $F \otimes \xi$ par

$$Df(x) = \sum_{1 \le i \le n} (A_{v_i} \otimes I) \nabla_{v_i} f(x) , \qquad x \in M \tag{1}$$

où (v_i) est une base orthonormée (arbitraire) de T_xM et $A_{v_i} \in \mathrm{End}(F_x)$ est la multiplication de Clifford. L'opérateur D est autoadjoint sur $\Gamma(F \otimes \xi)$ et envoie $\Gamma(F^+ \otimes \xi)$ dans $\Gamma(F^- \otimes \xi)$, ainsi que $\Gamma(F^- \otimes \xi)$ dans $\Gamma(F^+ \otimes \xi)$. Soient D^+ , D^- les restrictions de D à ces espaces. Il s'agit de calculer l'*indice* $\mathrm{Ind}(D^+) = \dim\ker D^+ - \dim\ker D^-$.

2. Densité de l'indice et noyau de la chaleur

2.1. Formule de l'indice : Les travaux de Atiyah-Singer, Atiyah-Bott-Patodi, Gilkey, Getzler, et altri fournissent la formule $\mathrm{Ind}(D^+) = \int_M \mathfrak{I}(x)dx$, avec identification précise de $\mathfrak{I}(x)$; de plus la classe d'équivalence (en cohomologie de de Rham) de la forme différentielle $\mathfrak{I}(x)dx$ est *indépendante* du choix de la métrique sur M et de la connexion sur X ; la classe de $\mathfrak{I}(x)dx$ se calcule à partir des formes de Pontrjagin sur M et du caractère de Chern $\mathrm{ch}(\xi)$.

2.2. Le semi-groupe $e^{-(t/2)D^2}$: Il agit sur $\Gamma(F \otimes \xi)$ par

$$e^{-(t/2)D^2} f(x) = \int_M Q_t(x,y) f(y)dy \qquad \text{pour } f \in \Gamma(F \otimes \xi) , \quad x \in M \tag{2}$$

où le noyau $Q_t(x,y)$ est une application linéaire de $(F \otimes \xi)_y$ dans $(F \otimes \xi)_x$. De plus $Q_t(x,x)$ laisse $F_x^+ \otimes \xi_x$ et $F_x^- \otimes \xi_x$ invariants ; pour tout $A \in \mathrm{End}(F \otimes \xi)_x$ ayant la même propriété notons A^+ , A^- les restrictions de A à ces sous-espaces et $\rho(A) = \mathrm{tr}(A^+) - \mathrm{tr}(A^-)$. On a alors d'après [1]

$$\mathrm{Ind}\, D^+ = \int_M \rho[Q_t(x,x)]dx$$

d'où la densité de l'indice

$$\mathfrak{I}(x) = \lim_{t \to 0} \rho[Q_t(x,x)] . \tag{3}$$

2.3. L'approche de Bismut : Comme $e^{-(t/2)D^2}$ est subordonné au semi-groupe de la chaleur, Bismut [7] estime $Q_t(x,y)$ grâce à *une version approchée* $\hat{P}$ de la loi de la trajectoire brownienne $x_{[0t]}$ sur M conditionnée par $\{x_0 = x , x_t = y\}$ et utilise un mouvement *brownien auxiliaire* W_t sur $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$. Il obtient une expression probabiliste de $\mathfrak{I}(x)$ à partir de W et d'un pont brownien $\hat{w}$ sur $\mathbb{R}^n$. D'élégants calculs différentiels stochastiques permettent de découpler les variables indépendantes W et $\hat{w}$ et d'identifier ainsi $\mathfrak{J}(x)dx$ au terme de plus haut degré dans le *produit* de deux formes obtenues séparément par les homomorphismes de Chern-Weil de TM et ξ.

L'efficacité et la finesse du calcul sont remarquables, mais la méthode est un peu alourdie par l'estimation $\hat{P}$ dont la construction requiert un travail technique considérable (Bismut [6]). Nous avons préféré remplacer l'utilisation de $\hat{P}$ par un simple développement de Taylor trajectoriel du brownien conditionné, dans l'esprit de [3]. Ce point de vue s'applique aussi au calcul de Bismut [7] concernant les formules de point fixe de Lefschetz (Atiyah-Singer [2]).

Signalons enfin une belle démonstration récente (Berline-Vergne [4]) des formules de l'indice, basée sur l'étude (non probabiliste !) du noyau de la chaleur sur le fibré des repères.

3. Expression probabiliste de $e^{-(t/2)D^2}$

3.1. L'opérateur D^2 et le laplacien horizontal : Pour $f \in \Gamma(F \otimes \xi)$, le *laplacien horizontal* Δ^H agit sur f par

$$\Delta^H f(x) = \sum_{1\le i\le n} (\nabla_{v_i})^2 f(x) , \qquad x \in M$$

où $v_1 \ldots v_n$ est une base orthonormée quelconque de T_xM. Un calcul formel classique (cf. [10], [7]) donne pour $x \in M$

$$-\frac{1}{2} D_x^2 = \frac{1}{2} \Delta_x^H + C_x$$

avec $C_x \in \mathrm{End}(F \otimes \xi)_x$ donné par

$$C_x = -\frac{1}{8} K(x) I - \frac{1}{2} \sum_{1\le i<j\le n} A_{v_i} A_{v_j} \otimes L_x(v_i, v_j) . \tag{4}$$

Ici $K(x)$ est la courbure scalaire de M en x ; les v_i forment une base orthonormée quelconque de T_xM, les $A_v \in \mathrm{End}(F_x)$ sont les multiplications de Clifford (cf. 1.2); L est le tenseur de courbure du fibré ξ et les $L_x(v_i, v_j)$ sont des endomorphismes antihermitiens de ξ_x.

3.2. Différentielles stochastiques : Lorsque φ_t est une semi martingale brownienne nous notons $d\varphi_t$ sa différentielle stochastique de Stratonovitch, $\delta\varphi_t$ sa différentielle d'Ito. Dans tout le contexte des semi martingales browniennes à valeurs dans des variétés, l'*interprétation formelle* "$d\varphi_t = \varphi_t' dt$" est *cohérente* et justifiée par Malliavin [12], Bismut [5] ; c'est celle qui sous-tend toutes les notations adoptées ici. L'indice t sera *occasionnellement omis* dans les équations stochastiques. Les ∂_ε , ∂_x ... désignent les *dérivées (déterministes !) usuelles*.

3.2. Brownien sur M et transport parallèle : Soit $w_t : \Theta \to \mathbb{R}^n$ un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^n$ défini sur l'espace de probabilité (Θ, P). Construisons le mouvement brownien x_t sur M par la méthode de Malliavin. A tout $v \in \mathbb{R}^n$ on associe le *champ de vecteurs horizontal standard* $B(v)$ sur le fibré des repères N , défini par $\pi^*B_u(v) = u.v$ pour tout $u \in N$. L'unique solution $u_t : \Theta \to N$ de l'équation différentielle stochastique suivante, avec condition initiale $u_0 \in N$,

(5) $$du_t = B_{u_t}(dw_t)$$

a pour projection $x_t = \pi u_t$ mouvement brownien sur M issu de $x_0 = \pi u_0$, et solution de

(6) $$dx_t = u_t.dw_t \ .$$

De plus le transport parallèle de $T_{x_0}M$ sur $T_{x_t}M$ le long de la trajectoire brownienne $x_{[0t]}$ vaut $u_t u_0^{-1}$.

Plus généralement le *transport parallèle* τ_t de $(F \otimes \xi)_{x_t}$ sur $(F \otimes \xi)_{x_0}$ le long de la trajectoire $x_{[0t]}$ parcourue *en sens inverse du temps* vérifie l'équation de Stratonovitch (cf. [5])

(7) $$d\tau_s f(x_s) = \tau_s \nabla_{dx_s} f(x_s) \qquad \text{pour } f \in \Gamma(F \otimes \xi)$$

et donc l'équation d'Ito

(8) $$\delta\tau_s f(x_s) = \tau_s(\nabla_{\delta x_s} f_s(x_s) + \tfrac{1}{2}\Delta^H f(x_s)ds) \qquad \text{pour } f \in \Gamma(F \otimes \xi).$$

En particulier on voit que

(9) $$e^{(t/2)\Delta^H} f(x_0) = E_{x_0}[\tau_t f(x_t)] \ .$$

3.4. <u>La formule de Feymann-Kac</u> <u>"matricielle"</u> : Par analogie avec le cas où $C \in \mathrm{End}\,\Gamma(F \otimes \xi)$ est scalaire on cherche une formule du type

$$e^{-(t/2)D^2} f(x_0) = e^{t((1/2)\Delta^H + C)} f(x_0) = E_{x_0}[V_t \tau_t f(x_t)]$$

avec $V_t \in \mathrm{End}(F \otimes \xi)_{x_0}$, non anticipatif, de classe C^1 en t , et $V_0 = I$. La formule d'Ito et (8) donnent

$$E_{x_0}[V_t\tau_t f(x_t)] - f(x_0) = \int_0^t E_{x_0}[(V'_s\tau_s f(x_s) + V_s\tau_s(\tfrac{1}{2}\Delta^H f(x_s))]ds$$

d'où le choix de V_s comme solution de

$$V'_s = V_s\tau_s C_{x_s}\tau_s^{-1} \quad ; \quad V_0 = I \ ,$$

et donc d'après (4) $V_s = k_s U_s$ avec $U_s \in \mathrm{End}(F \otimes \xi)_{x_0}$, $k_s \in \mathbb{R}$

(10) $$\begin{cases} k_t = \exp[-\tfrac{1}{8}\int_0^t K(x_s)ds] \\ U'_s = -\tfrac{1}{2}U_s\Big(\sum\limits_{1\le i<j\le n} \alpha^{ij} \otimes L_s^{ij}\Big) \quad \text{et } U_0 = I \ , \end{cases}$$

où $\alpha^{ij} = A_{u_0e_i}A_{u_0e_j}$, $L_s^{ij} = \tau_s L_{x_s}(u_se_i, u_se_j)\tau_s^{-1}$, et (e_i) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$; dans ce calcul on utilise (4) avec $v_i = u_t e_i$. On obtient donc

(11) $$e^{-(t/2)D^2} f(x) = \int_M Q_t(x,y)f(y)dy = E_x[k_t U_t \tau_t f(x_t)]$$

4. <u>Pont brownien et calcul probabiliste du noyau de</u> $e^{-(t/2)D^2}$

4.1. <u>Pont brownien</u> : Soit $p(t,x,y)$ la densité de transition du brownien (x_t) sur M , c'est-à-dire le noyau de la chaleur sur M . Pour a , b fixés dans M