NICOLAS LERNER

Principe d'incertitude et microlocalisation

Astérisque, tome 152-153 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 669, p. 7-17
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1986-1987__29__7_0>

Séminaire BOURBAKI
39ème année, 1986-87, n° 669

Novembre 1986

PRINCIPE D'INCERTITUDE ET MICROLOCALISATION
[d'après C. Fefferman et D.H. Phong]

par Nicolas LERNER

1. INTRODUCTION

Le principe d'incertitude, dans son expression la plus intuitive, affirme qu'on ne peut déterminer à la fois la position x d'une particule et sa quantité de mouvement ξ avec une précision arbitrairement petite. Il constitue donc une *limitation* à la localisation dans l'espace de phase (V,σ) (V espace des (x,ξ) , $V = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$, σ est la forme symplectique). Considérons une famille $\mathcal{E} = \{E_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ d'ellipsoïdes recouvrant l'espace de phase, i.e.

$$E_\nu = \{X \in V \ , \ g_\nu(X - X_\nu) \le 1\} \quad , \quad \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} E_\nu = V \ ,$$

où g_ν est une forme quadratique définie positive et X_ν un point de V . La famille $\mathcal{E}$ respecte le principe d'incertitude s'il existe une constante h telle que, pour tout ν ,

$$h^2\, g_\nu \le g_\nu^\sigma \ , \tag{1.1}$$

où g_ν^σ est la forme quadratique duale de g_ν par rapport à la forme symplectique. Rappelons la définition de g^σ : la forme symplectique σ s'identifie avec $\sigma : V \longrightarrow V^*$, $\sigma^* = -\sigma$, $\sigma(X,Y) = \langle\sigma X,Y\rangle_{V^*,V}$. La forme quadratique g s'identifie avec $g : V \longrightarrow V^*$, $g^* = g$, $g > 0$, $g(X,Y) = \langle gX,Y\rangle_{V^*,V}$. On définit alors $g^\sigma = \sigma^* g^{-1} \sigma$: c'est une forme quadratique définie positive sur V . Par exemple si

$$E_\nu \equiv \frac{|x - x_\nu|^2}{\Delta x_\nu^2} + \frac{|\xi - \xi_\nu|^2}{\Delta \xi_\nu^2} \le 1 \ ,$$

le principe d'incertitude (1.1) s'écrit

$$\Delta x_\nu \ \Delta \xi_\nu \ge h \ .$$

La version quantique du principe d'incertitude est que les opérateurs de position x_j et de quantité de mouvement $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ ne commutent pas. Utilisant cette remarque simple et profonde, il est facile d'établir les classiques "relations d'incertitude". Considérons un oscillateur

(1.2) $$\Omega = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 D_{x_j}^2 + \mu_j^2 x_j^2 .$$

On a l'identité (norme et produit scalaire L^2)

(1.3) $$((\lambda^2 D_x^2 + \mu^2 x^2)u,u) = \|(\lambda D_x - i\mu x)u\|^2 + \frac{\lambda\mu}{2\pi}\|u\|^2$$

($D_x = \frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial x}$, on posera $\mathring{i} = 2i\pi$).

On obtient donc

(1.4) $$(\Omega u,u) \geq \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j\right)\|u\|^2 .$$

Réutilisant (1.3) pour $\lambda\mu = 1$ et minimisant, il vient également

(1.5) $$\frac{1}{4\pi}\|u\|^2 \leq \inf_{1\leq j\leq n} \|D_{x_j} u\| \, \|x_j u\| .$$

La quantité $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j$ dans (1.4) est un invariant symplectique de la forme quadratique Ω noté $\mathrm{Tr}_+ \Omega$ ([21], [17], [18], [19] ch. 22). L'inégalité (1.4) est optimale, i.e. la plus petite valeur propre de Ω est $\frac{1}{2\pi}\mathrm{Tr}_+ \Omega$. Il y a évidemment un lien entre l'analyse microlocale des équations aux dérivées partielles et la mécanique quantique, celle-là cherchant notamment à "quantifier" des partitions plus ou moins raffinées de l'espace de phase.

2. MICROLOCALISATION ET PARTITION DE L'ESPACE DE PHASE

2.1. Le calcul de Weyl - Hörmander

Nous décrivons ici brièvement la présentation des opérateurs pseudo-différentiels donnée par Hörmander [18] ([19] ch. 18). Soit (V,σ,g) un espace vectoriel symplectique riemannien. Les symboles de poids m (m est une fonction sur V à valeurs strictement positives) sont les fonctions $a \in C^\infty(V)$ dont la croissance est contrôlée par g , i.e.

(2.1) $$\sup_{X\in V} \|a^{(k)}(X)\|_{g_X} m(X)^{-1} = C_k < \infty ,$$

i.e.

(2.2) $$|a^{(k)}(X)(T_1, \dots, T_k)| \leq C_k m(X)\, g_X(T_1)^{1/2} \dots g_X(T_k)^{1/2} .$$

On dira dans ces conditions que a appartient à $S(m,g)$. Cette métrique g induit une localisation dans l'espace de phase : en tout point $X \in V$ (e.g. $X = (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$) un voisinage pertinent est la g_X boule de centre X et de rayon fixé. Il est clair d'après des contre-exemples classiques [4] que des conditions doivent être imposées à g si on désire disposer d'un calcul pseudo-différentiel intéressant (e.g. les symboles d'ordre 0 (poids 1) se quantifient en opérateurs bornés sur L^2). Hörmander, à la suite des travaux de R. Beals et C. Fefferman [2], [3], [1] a dégagé les trois conditions simples suivantes.

(i) *La métrique* g *varie lentement, i.e. il existe* $C > 0$ *tel que, pour tout* (X,Y)

$$g_X(X-Y) \le C^{-1} \text{ implique } C^{-1}g_Y \le g_X \le C\, g_Y . \tag{2.3}$$

(ii) *Pour tout* X ,

$$g_X \le g_X^\sigma . \tag{2.4}$$

(iii) *Il existe* C, N , *tels que, pour tout* (X,Y)

$$g_X \le C\, g_Y\, (1+g_X^\sigma(X-Y))^N . \tag{2.5}$$

Notons que les fonctions poids m dans (2.1) sont astreintes à varier lentement (i.e. il existe C_m tel que, pour tout (X,Y) , $g_X(X-Y)\le C_m^{-1}$ implique $C_m^{-1} \le m(X)m(Y)^{-1} \le C_m$) et à vérifier $m(X)m(Y)^{-1} \le C_m(1+g_X^\sigma(X-Y))^{N_m}$. La première condition (i) de variation lente ne fait pas appel à la structure symplectique de l'espace de phase et permet d'obtenir de bonnes partitions de l'unité de V i.e. $\sum_{\nu=1}^{+\infty} \varphi_\nu(X) = 1$, la somme étant localement uniformément finie et φ_ν étant de poids 1 uniformément (i.e. $\sup_\nu \|\varphi_\nu^{(k)}\|_{g_\nu} = C_k < +\infty$, g_ν étant la métrique sur le support de φ_ν). Cette condition est en fait la seule hypothèse de "régularité" utile : si (i) est vérifiée, on peut construire une métrique riemannienne uniformément équivalente à la précédente. La condition (ii) est une version du principe d'incertitude ; notons que g étant une forme quadratique définie positive, on peut supposer (*cf.* [19] ch. 21) $g = \sum_{j=1}^n h_j(dy_j^2+d\eta_j^2)$ avec $\sigma = \sum_{j=1}^n d\eta_j \wedge dy_j$. La condition (ii) signifie alors $\max_{1\le j\le n} h_j \le 1$.

La condition (iii) est liée au lemme de Cotlar sur la presque-orthogonalité ([5] , [19] ch. 18) et permet de traiter les interactions à longue distance dans l'espace de phase.

On quantifie les symboles par la formule de Weyl [26], a^W désignant l'opérateur quantifiant a . On a

$$(a^W u)(x) = \int e^{\mathring{\imath}(x-y)\xi}\, a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, dy\, d\xi , \tag{2.6}$$

$$a^W = \int_{(\mathbb{R}^{2n},\sigma)} \hat{a}(\vartheta)\, e^{\mathring{\imath}\vartheta . M}\, d\vartheta , \tag{2.7}$$

$\vartheta = (\hat{x},\hat{\xi})$, $\vartheta . M$ étant l'opérateur autoadjoint $\hat{x} . x + \hat{\xi} . D_x$.

Notons également la formule utilisée dans [25],

$$a^W = 2^n \int_{(\mathbb{R}^{2n},\sigma)} a(Y)\, \sigma_Y\, dY , \tag{2.8}$$

où l'opérateur de symétrie de phase σ_Y , unitaire et autoadjoint sur L^2 , est défini par

$$(\sigma_{y,\eta} u)(x) = u(2y-x)\, e^{2\mathring{\imath}\langle x-y,\eta\rangle} .$$

L'intérêt de cette quantification réside dans son invariance symplectique qui s'exprime par la formule de Segal [23] ([19], ch. 18). Pour toute transformation symplectique linéaire χ , il existe U unitaire sur L^2 avec

$$(a \circ \chi)^W = U^* a^W U , \tag{2.9}$$

(U est élément du groupe métaplectique, revêtement à deux feuillets du groupe symplectique). La formule de Weyl est plus (anti) symétrique que la formule usuelle et présente notamment l'avantage de quantifier en opérateurs (formellement) auto-adjoints les symboles réels (notons que cette dernière propriété n'est pas caractéristique de la quantification de Weyl ; c'est la formule d'invariance symplectique (2.9) qui caractérise la formule de Weyl). Rappelons également l'expression de la formule de Leibniz (composition des symboles) dans ce cadre, $a \# b$ désignant le symbole de $a^W b^W$. On a

$$(a \# b)\ (X) = 2^{2n} \iint a(Y)b(Z)\ e^{-2i\sigma(Y-X,Z-X)}\ dY\,dZ . \tag{2.10}$$

Posons

$$\sigma_N(a,b) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=N} \frac{1}{\alpha!}\,\frac{1}{\beta!}\left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|+|\beta|} (-1)^{|\beta|}\ D_\xi^\alpha\,\partial_x^\beta\,a\ D_\xi^\beta\,\partial_x^\alpha\,b . \tag{2.11}$$

La forme asymptotique de (2.10) est

$$a \# b = \sum_{N=0}^{+\infty} \sigma_N(a,b) . \tag{2.12}$$

Notons que les deux premiers termes sont $ab + \frac{1}{2i}\{a,b\}$, $\{\ ,\ \}$ désignant le crochet de Poisson. Notons également que $\sigma_N(a,b) = (-1)^N \sigma_N(b,a)$.

THÉORÈME 2.1.- 1) *Si* $a \in S(1,g)$ (2.2), $a^W \in \mathcal{L}(L^2)$.

2) *Si* $a_j \in S(m_j,g)$, $j = 1,2$, $a_1 \# a_2 \in S(m_1 m_2,g)$ et

$$a_1 \# a_2 - \sum_{0\le k<N} \sigma_k(a_1,a_2) \in S(m_1 m_2 h^N,g) , \tag{2.13}$$

où

$$h(X) = \sup \left(\frac{g_X(T)}{g_X^\sigma(T)}\right)^{1/2} = \lambda(X)^{-1} . \tag{2.14}$$

2.2. <u>L'inégalité de Fefferman - Phong</u>

La problématique générale des inégalités de Gårding est la suivante. On cherche à déterminer l'ordre de grandeur de la plus petite valeur propre d'un opérateur (pseudo) différentiel moyennant une condition sur son symbole. Cette question est non seulement intéressante en elle-même (e.g. Etude du spectre d'opérateurs de Schrödinger $-\Delta + V(x)$), mais elle joue un rôle central en équations aux dérivées partielles. En effet, les estimations *a priori* du type

$$\|u\|_{H^{s_1}} \le \|Pu\|_{H^{s_2}} + \|u\|_{H^{s_1-\delta}} \tag{2.15}$$

(*cf.* e.g. [8], [19], ch. 27) peuvent être évidemment reformulées en termes de