

Astérisque

P. BIANE

Quelques propriétés du mouvement brownien non-commutatif

Astérisque, tome 236 (1996), p. 73-101

http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__73_0

© Société mathématique de France, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Quelques propriétés du mouvement brownien non-commutatif

P. Biane

Résumé. — Le mouvement brownien non-commutatif est la dilatation naturelle d'un semi-groupe d'applications complètement positives sur la C^* -algèbre du groupe d'Heisenberg. On étudie tout particulièrement les propriétés d'invariance par le groupe unitaire de ce processus, ce qui amène à considérer un processus de Bessel non-commutatif, dont le semi-groupe est relié à la compactification de Martin en espace-temps d'un processus de branchement.

0. Introduction.

Le mouvement brownien est l'une des pierres angulaires des probabilités modernes. Il y a peu de domaines de la théorie des processus stochastiques où l'on ne le rencontre pas, et ses relations avec la théorie du potentiel et les processus de Markov, la théorie des martingales, le calcul stochastique, ou encore les processus gaussiens, pour ne citer que quelques exemples, font qu'il a été l'objet d'innombrables études et que la recherche à son sujet est encore très active.

Il y a quelques années, les travaux de Hudson et Parthasarathy ont ouvert la voie à l'étude de nouveaux types de processus stochastiques, étude désignée souvent par le vocable générique de "probabilités quantiques" (voir par exemple [H-P], [P1], [M1], [M2], [B1]). Parmi les objets introduits figurent en bonne place les processus de création, annihilation et nombre, qui permettent en quelque sorte d'unifier le mouvement brownien et le processus de Poisson. Ceci amène naturellement à introduire une notion de "mouvement brownien non-commutatif", comme dans [C-H]. Le but de cet article est de tenter d'aller un peu plus loin dans l'étude de cet objet mathématique qui me semble particulièrement intéressant. L'idée sous-jacente est que beaucoup de résultats classiques concernant le mouvement brownien possèdent des analogues pour cet objet, avec bien sûr des modifications dues à la non-commutativité, et qu'une étude systématique devrait éclairer. Les résultats présentés ici apparaîtront bien modestes en regard de l'ampleur de la tâche, mais j'espère que cet article pourra encourager des recherches plus approfondies dans cette direction.

Qu'est-ce que le mouvement brownien non-commutatif? Pour tenter de répondre à cette question, considérons un mouvement brownien $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini sur un espace

de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . D'après un résultat bien connu de N. Wiener, l'espace L^2 engendré par les variables aléatoires $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ se décompose en chaos, autrement dit il existe un isomorphisme naturel entre cet espace et l'espace de Fock construit sur $L^2(\mathbb{R}_+)$. La variable aléatoire B_t , considérée comme un opérateur de multiplication sur l'espace de Fock, est la somme de deux opérateurs adjoints l'un de l'autre, A_t et A_t^* , les opérateurs d'annihilation et de création associés au vecteur $1_{[0,t]}$ de $L^2(\mathbb{R}_+)$. Il existe alors un mouvement brownien \tilde{B}_t sur un espace $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ et une isométrie de l'espace L^2 engendré par ce mouvement brownien dans $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$ tels que les opérateurs de multiplication par les variables \tilde{B}_t soient représentés dans l'espace de Fock par les opérateurs $\frac{1}{i}(A_t - A_t^*)$ (pour tout ceci on pourra consulter [M1]). Il y a donc deux mouvements browniens sur l'espace de Fock $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$, qui sont la partie réelle et la partie imaginaire du processus d'annihilation A_t . Les opérateurs A_t et A_t^* ne commutent pas, on a en fait la relation $[A_t, A_t^*] = tId$, ou de façon équivalente $[B_t, \tilde{B}_t] = 2itId$ ce qui fait qu'il n'existe pas d'isométrie entre $\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+))$ et l'espace L^2 d'un espace de probabilité où seraient définis simultanément deux mouvements browniens, B_t et \tilde{B}_t tels que $A_t + A_t^*$ et $\frac{1}{i}(A_t - A_t^*)$ soient les opérateurs de multiplication par B_t et \tilde{B}_t . On dispose ainsi d'un "mouvement brownien non-commutatif" qui est la donnée des deux mouvements browniens $B_t = A_t + A_t^*$ et $\tilde{B}_t = \frac{1}{i}(A_t - A_t^*)$, ou, de façon équivalente, la donnée des processus A_t et A_t^* . On peut imaginer que, physiquement, les processus B et \tilde{B} représentent l'évolution de la "position" et de la "vitesse" d'une particule brownienne quantique.

Le point de vue adopté dans cet article est que le processus non-commutatif $(A_t, A_t^*)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est en fait une réalisation particulière d'un processus de Markov non-commutatif associé à un semi-groupe d'applications complètement positives sur une certaine C^* -algèbre, et nous allons concentrer notre attention sur ce semi-groupe plutôt que sur sa réalisation particulière à travers les opérateurs de création et d'annihilation. Pour comprendre dans quel espace ce processus prend ses valeurs, remarquons que la relation de commutation $[B_t, \tilde{B}_t] = 2it$ est vérifiée pour tout temps t . On voit donc qu'au moins heuristiquement, le mouvement brownien non-commutatif prend ses valeurs, à l'instant t , dans un "espace non-commutatif" dans lequel la position d'un point est mesurée (au sens de la mécanique quantique) par deux coordonnées p et q qui vérifient la relation de commutation d'Heisenberg $[p, q] = 2it$. Le temps joue le rôle de la constante de Planck, et cet espace se déforme continûment avec le temps, ce qui entraîne, comme nous le verrons, que le mouvement brownien non-commutatif ne pourra être considéré comme un processus de Markov homogène, qu'à la condition de lui rajouter une composante temporelle. Une façon élégante de faire cette construction est de définir le semi-groupe du mouvement brownien non-commutatif comme un semi-groupe de convolution sur la C^* -algèbre du groupe d'Heisenberg. Le semi-groupe obtenu est un analogue non-commutatif du semi-groupe de la chaleur (c'est-à-dire du semi-groupe du mouvement brownien en espace-temps) plutôt que du mouvement brownien lui-même. La C^* -algèbre du groupe d'Heisenberg possède une structure très intéressante, avec une singularité à l'origine (voir [V], [L]) sur laquelle le comportement du mouvement brownien non-commutatif jette un peu de lumière.

Dans la suite on utilise le langage des C^* -algèbres car c'est le mieux adapté aux généralisations non-commutatives des concepts classiques, mais on n'utilisera pas de résultat sophistiqué de la théorie des algèbres d'opérateurs.

Comme le rappelle K.R. Parthasarathy dans l'introduction de son livre [P1], l'analogie entre le théorème de Lévy-Khinchine et les résultats sur les représentations factorisables de H. Araki [A], développés dans [P-S], a été à l'origine du calcul stochastique non-commutatif. Plus récemment, M. Schürmann [S] a montré qu'on pouvait généraliser cette approche pour construire des bruits blancs sur des bigèbres. Les idées présentées dans cet article sont donc familières aux spécialistes des probabilités quantiques, néanmoins je n'ai pas trouvé dans la littérature d'exposé qui s'attache à décrire de manière purement probabiliste ces objets, en particulier, il me semble que le "processus de Bessel quantique" décrit en 3.3 est passé inaperçu. Il m'a donc semblé intéressant de mettre au propre ces quelques réflexions. La seule originalité de l'article qui suit consiste à adopter un point de vue nettement probabiliste et à essayer d'appliquer des méthodes markoviennes ou potentialistes dans cette situation.

Voici comment est organisé cet article.

La première partie consiste en quelques préliminaires sur les C^* -algèbres, plus particulièrement les C^* -algèbres de groupes, et certains semi-groupes d'applications complètement positives, obtenus en considérant une fonction ψ continue, conditionnellement de type positif sur un groupe G localement compact, qui engendre un semi-groupe multiplicatif de fonctions de type positif $(e^{t\psi})_{t \in \mathbb{R}_+}$. Ce semi-groupe, agissant par multiplication sur l'algèbre $L^1(G)$ définit un semi-groupe de contractions complètement positives sur cette algèbre qui se prolonge à diverses autres algèbres engendrées par G . En restreignant ce semi-groupe à des sous-algèbres commutatives convenables, on peut obtenir des semi-groupes markoviens intéressants, dont on donne quelques exemples. On décrit ensuite une dilatation de ce semi-groupe au moyen de la théorie des représentations de groupes de courants, décrite par exemple dans [P-S].

Dans la seconde partie, on se concentre sur le groupe d'Heisenberg $H_d = \mathbb{C}^d \times \mathbb{R}$. On y décrit la structure de la C^* -algèbre de H_d , avec en particulier l'existence d'un couple de Gelfand construit grâce à l'action du groupe unitaire sur le groupe d'Heisenberg. La fonction conditionnellement de type positif $\psi(z, t) = it - \frac{1}{2}|z|^2$ sur H_d est associée à un semi-groupe de contractions complètement positives de $C^*(H_d)$, qui est un analogue non-commutatif du semi-groupe de la chaleur, et dont on commence l'étude.

Dans la troisième partie, on étudie de façon plus approfondie différentes propriétés d'invariance de ce semi-groupe qui sont des analogues de propriétés bien connues du mouvement brownien. En particulier, l'invariance du mouvement brownien usuel par changement d'échelle, qui permet de donner une construction simple du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, a un analogue non-commutatif que l'on utilise pour définir un "semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck" sur l'algèbre $\mathcal{B}(H)$ des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H . D'autre part, une propriété d'invariance par transformations unitaires nous permettra de définir un analogue non-commutatif du semi-groupe de Bessel, qui sera un semi-groupe de noyaux Markoviens sur une partie de \mathbb{R}^2 . On verra que le processus correspondant peut se construire à l'aide d'un processus de branchement classique, le processus de Yule, et d'un processus de mort très simple.

Enfin, on terminera par l'étude des "fonctions paraboliques bornées" pour ce semi-groupe, en donnant un théorème de représentation intégrale, analogue de la formule de Poisson classique pour les fonctions harmoniques bornées dans le disque unité.

Je remercie P. Bougerol et J.L. Sauvageot pour d'utiles discussions sur des sujets abordés dans cet article, ainsi que R. Hudson qui m'a communiqué la référence [C-H], et W. von Waldenfels qui m'a procuré une copie de son article [vW2].

1. Préliminaires.

1.1 C^* -algèbres et applications complètement positives.

Cette section est consacrée à des généralités et des rappels sur les C^* -algèbres, applications complètement positives, et d'autres notions voisines, qui sont bien connus des spécialistes. Les quelques résultats qui sont démontrés le sont pour la commodité du lecteur, car il n'a pas toujours été facile de trouver une référence adéquate. Je renverrai au livre de Dixmier [Di] pour une bonne partie des résultats et définitions de base.

Dans la suite, les espaces de Hilbert considérés seront toujours complexes. Si H est un espace de Hilbert, on note $\mathcal{B}(H)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur H , et $\mathcal{K}(H)$ celle des opérateurs compacts.

Soient A, B deux C^* -algèbres, et A'', B'' leurs algèbres de von Neumann enveloppantes (qui sont leurs biduaux au sens de la théorie des espaces de Banach, voir [Di] 12.1.3). Soit $Q : A \rightarrow B$ une application linéaire continue, complètement positive. Lorsque A et B sont abéliennes, isomorphes, par le théorème de Gelfand, à $C_0(X)$ et $C_0(Y)$, où $X = \text{spec}(A)$ et $Y = \text{spec}(B)$, l'application Q est associée à un noyau fellérien $N(y, dx)$ sur $Y \times X$, c'est à dire que l'on a, pour toute $f \in C_0(X)$, $Qf(y) = \int_X f(x)N(y, dx)$. (cf [D-M] IX.1).

Soit Q'' l'application biduale de Q , qui est un prolongement faiblement continu de Q à A'' , à valeurs dans B'' ; l'application Q'' est encore une application complètement positive de A'' dans B'' .

1.2. Cas des C^* -algèbres de groupes.

Soit maintenant G un groupe localement compact. Toute représentation unitaire, faiblement continue, de G détermine de façon canonique une représentation de l'algèbre de Banach $L^1(G)$. La C^* -algèbre de G notée $C^*(G)$ est la complétée de $L^1(G)$ pour la norme $\|f\| = \sup_\pi |\pi(f)|$, où π parcourt l'ensemble des représentations unitaires faiblement continues de G . Dans la suite nous ne considérerons que de telles représentations, sans le préciser.

Lorsque G est abélien, les représentations irréductibles de G sont de dimension 1 et forment le groupe \hat{G} des caractères de G , l'algèbre $C^*(G)$ est alors isomorphe, par l'isomorphisme de Gelfand, à $C_0(\hat{G})$.

Soit φ une fonction continue de type positif sur G telle que $\varphi(e) \leq 1$, on a alors $|\varphi| \leq 1$ sur G et l'application $Q : L^1(G) \rightarrow L^1(G)$, $f \mapsto \varphi f$ est une contraction complètement positive de l'algèbre $L^1(G)$.