Patrick Dehornoy au prisme de l'informatique fondamentale

• P.-L. Curien

J'ai commencé à fréquenter Patrick Dehornoy dans son univers mathématique au milieu des années 2000, lorsque, prenant son bâton de pèlerin, il était venu expliquer dans notre séminaire de théoriciens des langages de programmation son approche à la réécriture, nourrie de son expérience avec l'autodistributivité (il en sera question plus loin). Il avait parallèlement soumis par mon intermédiaire un joli article à la revue *Mathematical Structures in Computer Science*, et avait été si heureux des remarques du rapporteur (un « réécrivain » hollandais) qu'il m'avait demandé si je pouvais le mettre en contact avec ce dernier. Et de fil en aiguille, l'article est paru sous les deux noms de Patrick Dehornoy et de Vincent Van Oostrom [4]. Moins d'une dizaine d'années plus tard, à l'issue de son mandat à la direction de l'institut en charge des mathématiques du CNRS (l'INSMI), j'ai été ravi quand Patrick m'a fait part de son souhait de demander un accueil en délégation dans mon laboratoire *Preuves, Programmes et Systèmes* (PPS), à l'université Paris Diderot. Séjour qui a été suivi par un accueil en qualité de chercheur associé. Patrick ne nous a donc plus quittés. Il avait jusqu'à son décès son bureau à l'IRIF [1].

Il participait régulièrement à notre groupe de travail *Catégories supérieures, polygraphes et homotopie*. Il a prêté son concours à plusieurs évènements coorganisés avec nos collègues de Lyon et Marseille. Ainsi, en janvier 2014, il a donné un mini-cours intitulé *Garside calculus* dans le cadre d'une semaine *Algèbre et Calcul* à Lyon. C'est là que j'ai été saisi la première fois, scotché même, par ses talents de conférencier : énergie, précision, clarté lumineuse. Il a aussi été dans le comité scientifique du colloque *Catégories pour la théorie de l'homotopie et la réécriture* qui s'est tenu au CIRM en septembre 2017. Dès les premiers temps de son séjour à Paris Diderot, sous son impulsion, nous avions organisé un groupe de lecture du « livre bleu » (*Foundations of Garside Theory*), qui était alors en voie d'achèvement. Nous avons ainsi baigné dans les « règles de domino » les « retournements », et autres techniques, qui, toujours plus affinées, se retrouvent dans le travail qu'il a mené chez nous avec Yves Guiraud sur la normalisation quadratique [2]. Plus généralement, ces années nous ont permis de bénéficier de son attitude toujours généreuse et à l'écoute, et de sa volonté d'expliquer et de partager ses passions mathématiques, tel un grand chef cuisinier heureux de voir le sourire sur les visages des convives au moment de la dégustation.

Mais revenons en arrière, et tentons de donner un aperçu pouvant éclairer ces liens avec l'informatique. Je laisse d'abord la parole à Matthieu Picantin, mon collègue à l'IRIF, et élève de Patrick. « *Son premier livre de recherche* Braids and self-distributivity, *ou « livre vert »* [2]*, paru en 1999, présente les connexions qu'il a découvertes entre les groupes de tresses et les systèmes autodistributifs, qui sont des ensembles équipés d'une opération binaire satisfaisant à l'équation*

$$x \star (y \star z) = (x \star y) \star (x \star z).$$

Cette identité pourrait sembler presque incongrue, alors qu'en réalité de nombreuses opérations naturelles la vérifient, telle la conjugaison dans un groupe : en définissant $x \star y = xyx^{-1}$, on a effectivement

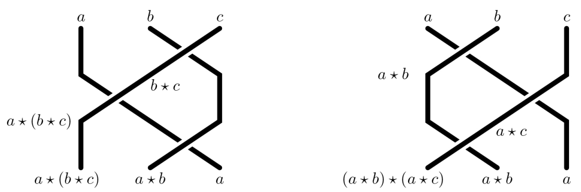
$$\begin{aligned} x \star (y \star z) &= x\,(y \star z)\,x^{-1} = x\,y\,z\,y^{-1}x^{-1} \\ (x \star y) \star (x \star z) &= (x \star y)\,(x \star z)\,(x \star y)^{-1} \\ &= x\,y\,x^{-1}\;x\,z\,x^{-1}\;x\,y^{-1}\;x^{-1}. \end{aligned}$$

Cette monographie reprend l'ensemble de ses travaux ayant mené à un ordre linéaire invariant à

1. Institut de Recherche en Informatique Fondamentale, CNRS et Université Paris Diderot, né de la fusion de PPS et du LIAFA.
2. Ici, « bleu » et « vert » font référence à la couleur des couvertures.

gauche pour les groupes de tresses : l'ordre de Dehornoy. C'est véritablement une somme compacte, d'où s'échappent une multitude de pistes, de variantes, de digressions, toujours parfaitement ciselées et impeccablement présentées pour inviter si possible sans trop de douleur le lecteur ou la lectrice à poursuivre. Patrick était tout à fait conscient qu'il s'agissait bien d'une montagne intrigante que très peu de randonneurs chercheraient à gravir complètement. Dans sa vidéo[3] *– réalisée à l'occasion d'une petite fête pour ses soixante-cinq ans – où lui-même s'imagine s'ennuyant ferme au paradis des mathématiciens, c'est bien un exemplaire du « livre vert » que le chercheur du futur – Cédric Villani en « special guest » avec ses cheveux pailletés et sa combinaison à double cravate argentée – va finalement extraire des sous-sols abandonnés et poussiéreux de l'Institut Henri Poincaré.*

Pour entrevoir un premier lien entre tresses et autodistributivité, certainement le plus accessible, il s'agit de convenir que l'on colorie les brins d'une tresse (positive) en piochant dans un ensemble de couleurs diverses muni d'une opération binaire $\star$*, selon la règle qui veut qu'à chaque croisement la couleur* a *du brin « au-dessous » reste inchangée, tandis que la couleur* b *du brin « au-dessus » s'étoffe pour devenir la couleur* $a \star b$*. Il faut imaginer Patrick au tableau, avec son grand sourire, en train de mimer le coloriage des brins – ou plus littéralement le coulage de peinture depuis le haut de chaque brin – avec son pouce renversé, agrémentant l'action de ses glouglous gourmands.*



Ce coloriage respecte ainsi les relations de tresses (positives) si et seulement si son opération $\star$ *est autodistributive. Superbe ! Mais cela n'est que le tout début de l'histoire – en vérité, histoire quelque peu renversée — de ces liens entre tresses et autodistributivité. La suite du traitement requiert alors des trésors d'inventivité et des hectolitres de peinture et de patience. Il s'agit entre autres de concevoir des formes normales pour ces systèmes autodistributifs, des algorithmes pour les calculer, les manipuler, et les transformer en d'autres formes normales, des moyens de contrôle dans la réécriture de termes, avec au passage maints jolis dessins d'arbres toujours explicites. Vient également la construction d'une opération autodistributive sur les tresses elles-mêmes (en ne bornant pas le nombre des brins), en coloriant ces tresses par des tresses pour aboutir à l'opération suivante dite d'exponentiation :*

$$a \wedge b = a\, sh(b)\, \sigma_1\, sh(b^{-1}), \tag{1}$$

où sh est l'opération consistant à placer tout à gauche de la tresse un brin vertical « frais ».

Cruciale pour obtenir l'ordre de Dehornoy, l'acyclicité de la division pour l'ensemble des tresses muni de cette exponentiation $^\wedge$ *est alors obtenue via une preuve syntaxique – syntaxique donc évidemment préférable selon Patrick – de cette acyclicité dans les systèmes autodistributifs libres, au prix d'une vérification de la cohérence et de la convergence de l'opération de complément dans le monoïde décrivant la géométrie de la loi d'autodistributivité.*

Patrick n'était pas peu fier de cette exponentiation colorée, de sa genèse tortueuse et de sa présentation élégante, et l'on peut noter qu'elle figure en bonne place sur le tableau noir du chercheur du futur argenté ! »

Magique, cette double apparition de la loi autodistributive dans le contexte des tresses ? C'est sans compter que le magicien nous dévoile ses tours, et introduit, pour expliquer ce phénomène et le placer dans un contexte beaucoup plus général, l'une de ses méthodes phares, celle du « blueprint ». Pour la présenter, faisons halte un moment chez les réécrivains « pur jus ». Pour eux, le « jackpot », c'est quand un système de réécriture sur des termes, c'est-à-dire une présentation équationnelle avec un choix d'orientation des équations $t = t'$ (on écrit $t \to t'$ pour l'orientation de gauche à droite), est convergent, c'est-à-dire à la fois confluent et noethérien[4]. Alors (modulo des hypothèses d'effectivité), la décidabilité de l'égalité tombe avec une grande facilité : tous les termes ont une forme normale unique[5], et deux termes t, t' sont équivalents par la théorie équationnelle si et seulement s'ils ont la même forme normale. Mieux, on peut rendre

3. `https://dehornoy.users.lmno.cnrs.fr/clips.html`

4. On note $\to^*$ la clôture réflexive et transitive de $\to$. La confluence (locale) dit que $t \to^* t_1$ et $t \to^* t_2$ (respectivement $t \to t_1$ et $t \to t_2$) impliquent toujours l'existence de t' tel que $t_1 \to^* t'$ et $t_2 \to^* t'$. La noethérianité dit qu'il n'existe pas de suite infinie (t_n) de termes telle que $t_n \to t_{n+1}$ pour tout n.

5. Un terme t est en forme normale s'il n'est pas réductible, i.e., il n'existe pas t_1 tel que $t \to t_1$.