

L'ÉTOILE DE MITTAG-LEFFLER
AUTOUR D'UNE COLLECTION DE TEXTES
ÉCRITS DE 1898 À 1920

Frédéric Jaëck

Résumé. — Cet article étudie une collection de publications de Mittag-Leffler dans lesquelles il développe une nouvelle façon de représenter les fonctions analytiques sur un domaine étoilé maximal. En utilisant le concept de prolongement emprunté à Weierstraß, et en s'appuyant sur une conception géométrique de domaines emboîtés, Mittag-Leffler obtient une représentation des fonctions analytiques en séries qui étend la notion de série de Taylor tout en conservant ses propriétés les plus importantes.

Abstract (Mittag-Leffler's star. About a collection of texts written between 1898 and 1920)

This paper studies a collection of publications by Mittag-Leffler in which he develops a new way of representing analytic functions on a maximal star domain. Using the concept of extension borrowed from Weierstraß, and relying on a geometric conception of nested domains, Mittag-Leffler obtains a representation of analytic functions in series that extends the notion of Taylor series while retaining its most important properties.

Texte reçu le 10 novembre 2021, révisé le 16 janvier 2024, accepté pour publication le 23 janvier 2024.

Frédéric Jaëck, Aix-Marseille Université, 52 Avenue Escadrille Normandie-Niemen, 13 013 Marseille, France. ADEF UR 4671 et SPHERE UMR 7219.

Courrier électronique : frederic.jaeck@math.cnrs.fr

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55; 01A60.

Mots clés : Étoile de Mittag-Leffler, analyse, fonctions analytiques.

Key words and phrases. — Mittag-Leffler's star, analysis, analytical functions.

Cet article a été élaboré à la suite de plusieurs séjours à l'Institut Mittag-Leffler (Djurs-holm, Suède) et a bénéficié de nombreuses discussions avec Laurent Mazliak, Emma Sallent Del Colombo et Rossana Tazzioli alors que nous travaillions sur l'édition de la correspondance entre Mittag-Leffler et Volterra, [Jaëck et al. 2019].

1. INTRODUCTION

Entre 1898 et 1920 Mittag-Leffler a publié six textes sous le titre « Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène », en français et dans la revue qu'il a fondée, *Acta Mathematica*¹.

En fait, ces articles de Mittag-Leffler sont précédés de deux séries de notes (quatre notes en tout) publiées aux comptes rendus de l'académie des sciences de Stockholm qui sont écrites en suédois.

La première de ces notes est intitulée « Om en generalisering af potensserier » [Mittag-Leffler 1898a, 9 mars 1898], puis trois autres notes publiées sous le titre « Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion » [Mittag-Leffler 1898b], présentées respectivement le 11 mai (deux communications) et le 14 septembre 1898 devant l'académie. Ces textes introduisent les idées essentielles et le concept d'*étoile* qui vont permettre à Mittag-Leffler de faire un pas décisif dans le domaine de la représentation des fonctions analytiques de la variable complexe.

Ce n'est probablement qu'après en avoir parlé avec des collègues, comme le montre désormais la publication de plusieurs correspondances², que Mittag-Leffler va prendre conscience de l'importance des idées qu'il a développées pour la première fois dans les notes en suédois. Ceci l'amènera rapidement à republier ces idées initiales en langue française, en commençant par une note aux Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris [Mittag-Leffler 1899b], puis dans *Acta Mathematica*³.

Les travaux de Mittag-Leffler sur ce sujet susciteront des réactions mathématiques nombreuses qu'il consignera rapidement dans ses propres articles. Il est donc possible de construire, à partir de la série de textes que nous étudions ici, une bibliographie extrêmement riche qui permet d'explorer les diverses facettes de l'étude fine des fonctions analytiques et de leurs représentations au début du xx^e siècle. De plus, cette bibliographie secondaire⁴ permet de comprendre comment une communauté de mathématiciens désormais bien identifiée par les historiens a cherché à franchir un nouveau pas et à forger petit-à-petit une notion moderne

¹ Voir à ce sujet [Barrow-Green 2002 ; Domar 1982 ; Duda 1996] et l'introduction de [Jaëck et al. 2019].

² Voir en particulier la correspondance avec Henri Poincaré éditée par Nabonnand [Nabonnand 1999], et la correspondance avec Volterra éditée par Jaëck, Mazliak, Sallent Del Colombo et Tazzioli [Jaëck et al. 2019], par exemple.

³ Les résultats des notes en suédois sont repris *in extenso* dans le premier des six articles publiés à *Acta Mathematica*, avec des ajustements mineurs.

⁴ Nous donnons la liste des travaux cités par Mittag-Leffler dans une bibliographie séparée à la fin de notre article.

de fonction analytique à partir des conceptions classiques établies par Weierstraß.⁵

Au tournant du XIX^e-XX^e siècle, Mittag-Leffler apparaît comme un acteur qui joue un rôle important dans la circulation des mathématiques de son époque, et il est au centre d'un réseau qui se concrétise petit-à-petit autour de plusieurs activités. Les invitations de personnalités à faire cours dans plusieurs universités et la création de revues internationales de mathématiques sont deux éléments tangibles de cette nouvelle organisation.

Mittag-Leffler devient docteur en 1872, et après l'obtention d'une bourse, il passe les trois années suivantes à l'étranger. Il fréquente d'abord l'université de Paris où il fait la connaissance de Darboux, Liouville, Briot, Bouquet et plusieurs autres mathématiciens éminents de l'époque. À Paris, Mittag-Leffler assiste aux cours de Charles Hermite sur les fonctions elliptiques. Au printemps 1874, il s'installe à Berlin et commence à assister aux cours de Weierstrass qui propose lui aussi une approche des fonctions elliptiques qui séduit davantage le jeune docteur. La façon de penser les fonctions analytiques que nous retrouverons tout au long des textes que nous présentons est grandement influencée par la pensée weierstrassienne dont Mittag-Leffler s'imprègne à Berlin.⁶

En 1877, Mittag-Leffler devient professeur à Helsingfors (Finlande), succédant à Lorenz Lindelöf, puis en 1881, il prend le premier poste de professeur de mathématiques du tout nouveau Collège universitaire de Stockholm (la future université de Stockholm). En 1882, il fonde le journal *Acta Mathematica*⁷ avec l'ambition qu'il soit rapidement un lieu de convergence des mathématiques les plus en pointe à son époque. Grâce aux contacts nombreux qu'il a su établir, il publie dès les premiers

⁵ Pour saisir l'évolution de la notion de fonction analytique, et plus largement de fonction de la variable complexe, le lecteur pourra consulter le livre *The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass* de Bottazzini [Bottazzini 1986], mais aussi le livre *Очерки по истории теории аналитических функций* (Essai sur l'histoire de la théorie des fonctions analytiques) de Markušević [Markušević 1951] ou encore son article «Some questions concerning the history of the theory of analytic functions in the nineteenth century» [Markušević] qui donnent une vision intégrant les travaux des mathématiciens russes.

⁶ Le lecteur intéressé par cette filiation mathématique Weierstraß – Mittag-Leffler peut se référer à l'ouvrage *Hidden harmony – geometric fantasies. The rise of complex function theory* de Gray et Bottazzini, et en particulier le chapitre 6, intitulé «Weierstrass Analytic Function Theory», [Bottazzini & Gray 2013]. Mentionnons aussi le livre *Karl Weierstraß (1815–1897). Aspekte seines Lebens und Werkes – aspects of his life and work* [König & Sprekels 2016] qui s'ouvre sur un chapitre de Rågstedt intitulé «Prelude: Gösta Mittag-Leffler and his quest for the Weierstraß legacy» [Rågstedt 2016].

⁷ Voir l'article «Gösta Mittag-Leffler and the foundation and administration of *Acta Mathematica*» [Barrow-Green 2002].

numéros des articles importants de mathématiciens allemands, finlandais, français, italiens, suédois, etc.

À Stockholm, Mittag-Leffler aura, pour le seconder dans le travail de relecture des articles soumis à la nouvelle revue, mais aussi comme collègue avec qui discuter des questions mathématiques importantes, Lars Edvard Phragmén. Les travaux de ce dernier ont porté sur les fonctions elliptiques et l'analyse complexe. Son résultat le plus célèbre est l'extension du théorème de Liouville aux fonctions analytiques sur un secteur angulaire. Une première version a été proposée par Phragmén, puis améliorée par le mathématicien finlandais Ernst Lindelöf. Ils ont publié conjointement cette dernière version, connue sous le nom de principe de Phragmén-Lindelöf dans le numéro 31 de la revue de Mittag-Leffler, daté de 1908, [Phragmén & Lindelöf 1908]. On retrouvera dans ce qui suit de nombreuses références aux travaux de Phragmén qui s'intéresse de près aux propriétés des fonctions de la variable complexe, essentiellement jusqu'en 1908.⁸

Les résultats que Mittag-Leffler expose sont donc, comme nous l'avons rappelé, dans la lignée des conceptions de Weierstraß qui ont fortement influencé ses propres recherches. Mittag-Leffler revient en détail, dans les articles que nous étudions ici, sur la notion de prolongement qui est au cœur de la définition weierstrassienne de fonction analytique et dont il va mener une critique fine. Son but initial est d'établir une représentation unique d'une fonction, sous forme de série (double), qui reste valide sur un domaine aussi vaste que possible. Afin de répondre à cette contrainte, il développe le concept d'*étoile* dont nous redonnerons la construction dessous et dont nous analyserons comment elle a permis au mathématicien suédois de progresser.

D'un point de vue historique les textes de Mittag-Leffler que nous présentons ici sont importants pour comprendre l'évolution des idées non seulement en analyse des fonctions de la variable complexe, mais aussi en ce qui concerne le rôle de ces idées dans diverses branches des mathématiques, comme dans l'analyse fonctionnelle qui se développe à grands pas à la charnière entre les XIX^e et XX^e siècles.⁹

⁸ En plus de l'analyse, Phragmén s'intéresse dès les années 1890 au problème du vote démocratique, aux mathématiques de l'assurance et il intégrera un comité de réflexion sur une nouvelle législation des élections. En 1903 il quitte l'université pour intégrer l'Inspection royale des compagnies d'assurance dont il devint le directeur l'année suivante. En 1908, il est nommé directeur de la compagnie d'assurance Allmänna Lifförsäkringsbolaget. On peut consulter la biographie établie par Cramér [Cramér 1958].

⁹ Nous ne donnons ici que quelques pistes dans ce registre des interactions entre analyse classique et analyse fonctionnelle, ou encore avec d'autres champs des mathématiques fondamentales ou appliquées, car il dépasse de loin le cadre de notre étude.

Au-delà d'une sorte d'achèvement du programme weierstrassien dans la compréhension de la notion de fonction analytique, des travaux récents en histoire, et en particulier l'étude de la correspondance entre Mittag-Leffler et Volterra, montrent l'écho de cette conception nouvelle dans des domaines qui utilisent des fonctions de la variable complexe. En particulier Volterra, qui développe à la fin du XIX^e siècle un calcul différentiel et intégral pour des fonctions de lignes (que l'on nomme désormais dans un contexte moderne des 'fonctionnelles'), saisit l'intérêt de concevoir un domaine maximal étoilé où une fonction peut être représentée par une série qui étend la notion de série de Taylor.

Plus largement, il faut garder en tête que la notion de représentation d'une fonction en série restera un outil de prédilection des mathématiciens dans de nombreux problèmes qui préfigurent la naissance de l'analyse fonctionnelle moderne au début du XX^e siècle¹⁰.

On peut, à la lumière de nos connaissances actuelles, mettre en perspective les *éléments de fonction* que Mittag-Leffler reprend chez Weierstraß avec la notion de germe de fonctions analytiques puis de faisceaux, et tisser un lien avec les notions que les mathématiciens seront amenés à élaborer ensuite. L'idée de considérer des classes d'équivalence d'*éléments de fonction* plutôt que les *éléments de fonction* eux-mêmes, les réponses géométriques et topologiques pour traiter des branches multiformes et les prolongements selon des chemins distincts, la notion de monodromie etc., sont autant de développements qui prennent tout leur sens quand on les conçoit à la lumière des réflexions de Mittag-Leffler.

Par ailleurs, les six textes que nous présentons permettent de mieux comprendre la trajectoire intellectuelle du mathématicien Mittag-Leffler. Ils témoignent en effet d'une période particulière de son activité et de ses intérêts mathématiques.

Ils permettent de distinguer deux périodes dans le travail de recherche de Mittag-Leffler.

Il y a d'abord un premier type de travaux qui le mèneront à établir ce que l'on nomme désormais le *théorème de Mittag-Leffler*.

En 2013 Laura E. Turner publiait «The Mittag-Leffler Theorem: The origin, evolution, and reception of a mathematical result, 1876–1884» qui montre précisément comment Mittag-Leffler a réussi à prolonger et dépasser des conceptions de Weierstraß sur les fonctions méromorphes. Elle y

¹⁰ On peut à ce sujet lire l'article [Jaëck 2010] qui montre, grâce à une analyse des travaux de Fréchet, comment la notion de fonction représentable en série a joué un rôle majeur dans une progression vers une vision générale pour les problèmes d'équations intégrales.