MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MARIE-CLAUDE ARNAUD

Le « closing lemma » en topologie C^1

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 74 (1998)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1998_2_74__1_0>

LE «CLOSING LEMMA» EN TOPOLOGIE C^1

Marie-Claude Arnaud

Résumé. — À l'aide d'un résultat algébrique dû à Mai, nous écourtons la démonstration du «closing lemma» en topologie C^1 de C. Pugh et C. Robinson et en donnons un énoncé plus précis. Nous traitons un cas nouveau : celui des champs de vecteurs symplectiques.

Nous en déduisons le théorème de densité des points périodiques dans l'ensemble des points non errants ne tendant pas vers ∞ comme le faisaient C. Pugh et C. Robinson, donnant un résultat aussi dans le cas des champs de vecteurs symplectiques. Puis, nous énonçons un résultat nouveau : un lemme de fermeture d'orbite en topologie C^1, qui permet de rendre un point récurrent périodique en approximant son orbite.

Enfin, nous généralisons la version ergodique du «closing lemma» de R. Mañé au cas des variétés non compactes et des mesures boréliennes positives finies sur tout compact.

***Abstract* (The C^1 closing lemma).** — Using an algebraic result due to Mai, we give a simpler proof of the C^1 closing lemma of Pugh and Robinson and give a more precise result. We solve a new case : the case of symplectic vector fields.

We deduce the theorem of density of periodic points in the non wandering set, as Pugh and Robinson did, adding a result about symplectic vector fields. Then, we prove a new result : the C^1 orbit closing lemma, which allows us to transform a recurrent point to a periodic one by approximating its orbit.

Finally, we generalize the C^1 ergodic closing lemma of R. Mañé (the ergodic version of the orbit closing lemma) to the borelian positive measures, finite on every compact, defined on non compact manifolds.

Table des matières

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

On travaillera dans une variété M riemannienne de classe C^∞. On notera d la distance riemannienne associée et $B_\varepsilon(x)$ désignera toujours la boule ouverte de centre x et de rayon ε pour cette distance riemannienne.

1.1. « Closing lemma »

Le problème qu'on se pose est le suivant : pour un difféomorphisme f ou le flot (φ_t) d'un champ de vecteurs, soit x un point dont l'orbite (positive par exemple) s'accumule sur ce point (on dit que x est récurrent). Peut-on perturber le difféomorphisme ou le champ de vecteurs (dans une topologie à préciser) de telle sorte qu'il existe un point périodique proche de x ?

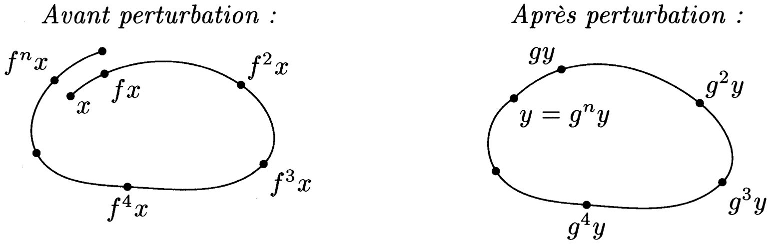

Figure 1

La même question se pose si x n'est plus récurrent mais non errant, c-à-d limite d'une suite de points (y_n) pour laquelle il existe une suite d'entiers (j_n) positifs (par exemple) telle que $(f^{j_n}(y_n))$ tend vers x.

Remarque immédiate. — Ceci revient en fait au problème de rendre x périodique. En effet :

1. pour les difféomorphismes : si g est « proche » de f et $g^m y = y$ pour un y proche de x et un $m \geq 1$, on peut construire « proche » de l'identité un difféomorphisme h tel que $hy = x$, et ensuite $h \circ g \circ h^{-1}$ est « proche » de f et admet x comme point périodique ;
2. pour les flots : on considère $\psi_t = h \circ \varphi_t \circ h^{-1}$.

En topologie C^0, la réponse est oui ; explicitons la démonstration pour les difféomorphismes. Si $f^n x$ est proche de x pour un $n \geq 1$, on peut construire W petit voisinage de x et de $f^n x$ homéomorphe à un disque fermé ne rencontrant pas $\{f^j x \mid 1 \leq j \leq n-1\}$. On peut alors construire un difféomorphisme g à support inclus dans W envoyant $f^n x$ sur x. Alors, $g \circ f$ est proche de f en topologie C^0 dès que W est assez petit et x est un point périodique de période n de $g \circ f$.

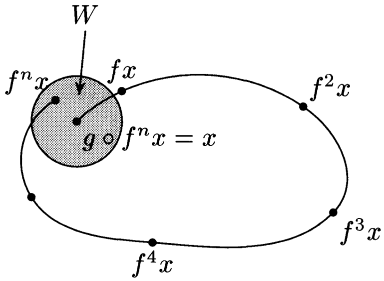

Figure 2

En topologie C^1, le résultat est beaucoup plus difficile à démontrer. En effet, en topologie C^1, pour « bouger » un point d'une distance δ à l'aide d'une perturbation ε-petite en topologie C^1, on a besoin d'un difféomorphisme différent de l'identité sur un voisinage de taille au moins $C^{te} \cdot \delta/\varepsilon$.

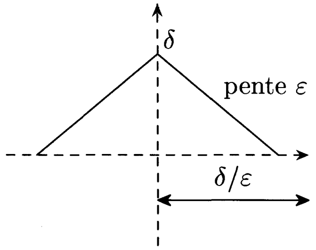

Figure 3

Le problème est alors le suivant : f désignant un difféomorphisme, supposons que $f^n p$ pour un $n > 0$ soit δ-proche de p. Essayons de faire la même construction que dans le cas précédent : soit g un difféomorphisme proche de l'identité, plus précisément : $\|g - \mathrm{Id}\|_{C^1} < \varepsilon$ (on suppose raisonner dans une carte pour prendre la norme) tel que $g(f^n p) = p$. Alors, on voit (c'est ce qu'illustre la figure 3 page ci-contre) que le support de $g - \mathrm{Id}$ contient la boule de centre $f^n p$ et de rayon δ/ε. Aussi, si l'orbite intermédiaire $\{f^j p \mid 1 \leq j \leq n-1\}$ de p sous f passait par cette boule, l'orbite de p sous $g \circ f$ ne passe peut-être plus par $f^{n-1}p$, donc on ne peut pas dire qu'on obtient une orbite périodique pour $g \circ f$.

Le problème en topologie C^1 est en fait beaucoup plus compliqué qu'en topologie C^0. C. Pugh a démontré le «closing lemma» en topologie C^1 pour les champs de vecteurs en 1967 dans **[13]** et **[14]** (le premier article concerne les points récurrents dans une variété quelconque, le second les points non errants dans une variété compacte). En 1981, dans **[15]**, C. Pugh et C. Robinson ont repris cette démonstration et aussi démontré le «closing lemma» en topologie C^1 pour les difféomorphismes et les flots. Ils y ont de plus démontré le «closing lemma» en topologie C^1 pour des difféomorphismes qui préservent une structure donnée (forme symplectique ou forme volume) ainsi que les champs de vecteurs qui préservent le volume et les champs de vecteurs hamiltoniens. Donnons par exemple leur énoncé pour les difféomorphismes :

CLOSING LEMMA POUR LES DIFFÉOMORPHISMES (C. Pugh & C. Robinson)

Soient M une variété de classe C^r ($1 \leq r \leq \infty$), f un difféomorphisme de classe C^r de M, p un point non errant de f tel que la suite $(f^n(p))_{n\geq 0}$ admet au moins une valeur d'adhérence et U un voisinage de p.

Alors, il existe aussi proche qu'on le veut en topologie C^1 de Id *un difféomorphisme g de classe C^r de M tel que $g \circ f$ a un point périodique dans U.*

Dans **[15]**, la démonstration concernant la partie algébrique de ce théorème est longue et ardue (on peut d'ailleurs en trouver un bref résumé dans **[16]**). C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à la nouvelle démonstration de cette partie algébrique donnée par Mai en 1984 dans **[6]** et **[7]**, beaucoup plus courte que la précédente, et c'est elle que nous avons essentiellement reprise dans le chapitre 6, en la réarrangeant en particulier grâce à d'avisés conseils de J.-C. Yoccoz.

Les énoncés du «closing lemma» que nous donnerons dans le chapitre 2 seront en fait beaucoup plus précis que celui donné ci-dessus :

- nous verrons qu'on peut imposer à g (avec les notations de l'énoncé précédent) d'être à support dans un voisinage de n'importe quel point de l'ensemble ω-limite de p (ceci est nouveau à ma connaissance) ;
- nous décrirons de façon précise l'orbite du point périodique de $g \circ f$, montrant en particulier qu'elle approxime un «bout d'une orbite» de f ; ceci sera fondamental pour la démonstration du lemme de fermeture d'orbite et de la version ergodique du «closing lemma».

Signalons aussi que nous traitons un cas qui n'avait jamais été traité : celui des champs de vecteurs qui préservent une forme symplectique. Dans ce cas, la nouveauté par rapport aux énoncés précédents du « closing lemma » est qu'on commence par faire une perturbation *globale* pour rendre une classe de cohomologie en un certain sens rationnelle avant d'utiliser des perturbations à support simplement connexe.

Expliquons enfin sans entrer dans les détails quel type de perturbation construit C. Pugh dans le cas des difféomorphismes (voir la figure 4 : se plaçant au voisinage d'une orbite p, fp, ..., il utilise un certain nombre de perturbations $g_1, \dots, g_\alpha$ de l'identité à supports disjoints telles que chaque g_i a son support au voisinage de $f^i p$ qui permettent de fermer progressivement une orbite : si $g = g_\alpha \circ \cdots \circ g_1$, alors $g \circ f$ a une orbite périodique. On fait donc plusieurs perturbations du type de celle décrite quand nous avions explicité le cas de la topologie C^0.

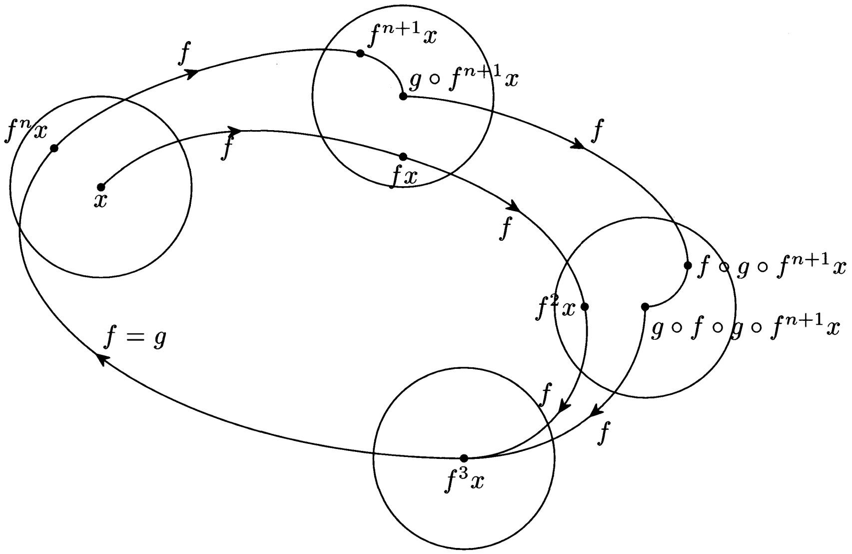

Figure 4

1.2. Théorème de densité, comprenant un lemme de fermeture d'orbite

Le « closing lemma » a été utilisé par C. Pugh et C. Robinson pour démontrer dans chacun des cas traités un théorème de densité (nous l'énoncerons au chapitre 3). Nous verrons dans la plupart des cas traités que nous pouvons démontrer que pour un G_δ dense en topologie C^1 de difféomorphismes, flots ou champs de vecteurs, l'ensemble des points périodiques est dense dans l'ensemble des points non errants p tels que

$$\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \varnothing.$$

Plus précisément, donnons cet énoncé pour les difféomorphismes, $\mathrm{Diff}^r(M)$ désignant l'ensemble des difféomorphismes de classe C^r de M, que nous munirons de la topologie C^1 de Whitney (elle est décrite dans [**15**]) :

THÉORÈME DE DENSITÉ POUR LES DIFFÉOMORPHISMES (C. Pugh & C. Robinson)
Soit M une variété de classe C^1. Alors, il existe un G_δ dense G de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel que pour tout f de G, l'ensemble des points périodiques de f est dense dans l'ensemble des points non errants p de f tels que

$$\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \varnothing.$$

Dans le cas des champs de vecteurs symplectiques, nous verrons que cet énoncé est faux dès que $\dim H^1(M, \mathbf{R}) \geq 2$.

Signalons que nous travaillons dans $\mathrm{Diff}^1(M)$ et non dans $\mathrm{Diff}^k(M)$ pour un $k \geq 2$ car $\mathrm{Diff}^1(M)$ muni de la topologie C^1 est un espace de Baire, alors que $\mathrm{Diff}^k(M)$ pour un $k \geq 2$ muni de cette même topologie C^1 n'en est pas un.

Nous montrerons mieux dans le chapitre 3, puisque nous donnerons des énoncés d'un lemme de fermeture d'orbite, ce qui permet de répondre à une question de [**12**]. Le «closing lemma» permet de transformer un point récurrent en un point périodique, mais il ne permet pas de s'assurer que l'orbite du point périodique créé est proche de l'orbite initiale (*i.e.* qu'on a bien fermé l'orbite, et pas seulement rendu le point périodique).

DÉFINITION 1.2.1. — Pour $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, on définit l'ensemble $\Sigma(f)$ des points $x \in M$ tels que pour tout voisinage U de f et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in U$ et $y \in M$ tel que :

(i) y est un point périodique de g de période notée m ;
(ii) $g = f$ sur $M - \bigcup_{0 \leq k \leq m} B_\varepsilon(g^k y)$;
(iii) $\forall\, i \in [0, m]$, $d(g^i y, f^i x) < \varepsilon$.

L'énoncé du lemme de fermeture d'orbite est alors :

LEMME DE FERMETURE D'ORBITE POUR LES DIFFÉOMORPHISMES
Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $R(f)$ l'ensemble de ses points positivement récurrents. Alors :
(1) $R(f)$ est un espace de Baire ;
(2) $\Sigma(f)$ est un G_δ dense de $R(f)$.

1.3. Une version ergodique du «closing lemma»

On s'intéresse alors à une version ergodique du lemme de fermeture d'orbite. Dans [**8**], R. Mañé a démontré que quand on travaille sur une variété compacte, pour un difféomorphisme f, l'ensemble $\Sigma(f)$ des points dont on peut fermer l'orbite