SÉVERINE RIGOT

Ensembles quasi-minimaux avec contrainte de volume et rectifiabilité uniforme

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 82 (2000)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_2000_2_82__R1_0>

ENSEMBLES QUASI-MINIMAUX AVEC CONTRAINTE DE VOLUME ET RECTIFIABILITÉ UNIFORME

Séverine Rigot

Résumé. — Dans ce mémoire, on s'intéresse à la régularité des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ qui quasi-minimisent le périmètre avec contrainte de volume, c'est-à-dire des sous-ensembles G de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient la condition de quasi-minimalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| + g(|G \triangle G'|),$$

pour tout $G' \subset \mathbb{R}^n$ tel que $G \triangle G' \Subset \mathbb{R}^n$ et $|G'| = |G|$. Ici $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G|$ désigne le périmètre de G et $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est fixée et vérifie $g(x) = o(x^{(n-1)/n})$ au voisinage de 0. Le principal résultat de ce mémoire est la rectifiabilité uniforme de la frontière des quasi-minima avec contrainte de volume, avec des paramètres universels. Nous appliquerons ces résultats à l'étude des minima de mesure de Lebesgue fixée de la fonctionnelle E définie par

$$E(G) = H^{n-1}(\partial G) + \iint_{G \times G} K(x - y)\, dx\, dy,$$

où $G \subset \mathbb{R}^n$, $H^{n-1}(\partial G)$ désigne la mesure de Hausdorff de dimension $n - 1$ de la frontière de G et $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est à support compact . Les estimations uniformes sur les paramètres qui interviennent dans les propriétés de régularité des quasi-minima avec contrainte de volume nous permettront d'obtenir l'existence d'ensembles optimaux ainsi qu'une description de ces minima (régularité de leur frontière, taille et nombre de leurs composantes connexes).

***Abstract* (Quasi-minimal sets with a volume constraint and uniform rectifiability)**

In this memoir, we study the regularity of quasi-minimal sets for the perimeter with a volume constraint, i.e., measurable subsets G of $\mathbb{R}^n$ which satisfy the following quasi-minimality condition :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| + g(|G \triangle G'|),$$

for every $G' \subset \mathbb{R}^n$ such that $G \triangle G' \Subset \mathbb{R}^n$ and $|G'| = |G|$. Here $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G|$ denotes the perimeter of G and $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ is fixed such that $g(x) = o(x^{(n-1)/n})$. The main result of this memoir is the uniform rectifiability of their boundary with universal parameters. We will then apply this result to the study of minimizers with prescribed Lebesgue measure of a functional E defined by

$$E(G) = H^{n-1}(\partial G) + \iint_{G \times G} K(x-y)\, dx\, dy,$$

where $G \subset \mathbb{R}^n$, $H^{n-1}(\partial G)$ denotes the $(n-1)$-Hausdorff measure of the boundary of G and $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ with compact support. Using the fact that the parameters in the regularity properties of quasi-minimizers with a volume constraint are universal, we will be able to obtain the existence of optimal sets together with a description of these minimizers (regularity of their boundary, size and number of their connected components).

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Ce mémoire est consacré à l'étude de la régularité de la frontière des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ qui quasi-minimisent le périmètre avec une contrainte de volume. Ce sont des ensembles dont on contrôle la variation de la surface de la frontière sous l'effet de perturbations compactes à volume constant. Cette variation est, au moins aux petites échelles, négligeable devant la surface initiale.

Les premiers résultats de régularité concernant la frontière réduite $\partial^* G$ des ensembles G qui minimisent localement le périmètre dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ ont été démontrés par E. De Giorgi ([**DG61**]) puis améliorés par M. Miranda ([**Mir65**]) et H. Federer ([**Fed70**]) : en dehors d'un ensemble de dimension de Hausdorff au plus $n-8$, la frontière réduite $\partial^* G$ est une hypersurface régulière (voir aussi [**Sim83**]). Des résultats analogues ont ensuite été étendus aux ensembles à courbure moyenne généralisée prescrite appartenant à $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > n$ ([**Mas74**], [**Mas75**], ...). De manière plus générale, des résultats de régularité partielle concernant la frontière des ensembles qui quasi-minimisent le périmètre sont maintenant classiques ([**Tam82**], [**Tam84**], [**AP99**], [**Rig00**], voir aussi [**Alm76**] et [**DS00**]).

La contrainte imposée aux solutions est en général une condition à la frontière de Ω. En vue de certaines applications, il apparaît cependant souvent pertinent d'imposer plutôt une contrainte de volume aux solutions. Mathématiquement, le problème le plus simple en ce sens est le problème isopérimétrique : minimiser la surface de la frontière à volume constant. Il est maintenant bien connu que, dans ce cas, les solutions sont, à un ensemble de mesure nulle près, des boules, c'est-à-dire des ensembles très réguliers. Par ailleurs, des propriétés de régularité partielle ont été démontrées pour les ensembles qui minimisent localement le périmètre avec une contrainte de volume ([**GMT83**]). Il ne semble pas cependant que les conditions de quasi-minimalité que nous allons étudier ici et qui allient le caractère quasi-minimal et la contrainte de volume aient été étudiées par le passé. Les ensembles auxquels nous allons nous intéresser sont les sous-ensembles G de $\mathbb{R}^n$ de mesure de Lebesgue finie qui satisfont à la condition de quasi-minimalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{G'}| + g(|G \triangle G'|)$$

pour tout $G' \subset \mathbb{R}^n$ tel que $G \triangle G' = (G \backslash G') \cup (G' \backslash G) \Subset \mathbb{R}^n$ et $|G'| = |G|$. Ici $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_G|$ désigne le périmètre de G et $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est fixée telle que $g(x) = o(x^{(n-1)/n})$ au voisinage de 0. On rencontre ce type de conditions dans certains problèmes variationnels où entrent en compétition des énergies de surface et de volume, par exemple quand on cherche à modéliser l'énergie d'une goutte de fluide incompressible soumise à des forces surfaciques telles que la tension superficielle ainsi qu'à d'autres forces volumiques (gravitation, champ magnétique, bulles de savon...) et que l'on veut décrire ce qui se passe à l'équilibre. C'est un tel modèle qui nous a servi de motivation initiale pour ce travail. Nous allons y revenir dans un instant.

Dans la plupart des contextes évoqués plus haut, les résultats de régularité qui ont été démontrés sont des résultats de régularité partielle, c'est-à-dire des résultats locaux et non uniformes. On s'est quant à nous attaché à obtenir des résultats quantitatifs et uniformes. Le principal résultat de ce mémoire est la rectifiabilité uniforme de la frontière des quasi-minima avec contrainte de volume, avec des paramètres universels. Sans entrer dans le détail pour l'instant, disons juste que la rectifiabilité uniforme est une notion de rectifiabilité donnant une régularité de type Lipschitz pour l'ensemble considéré, avec des informations quantitatives et invariantes par changement d'échelle. De ce point de vue, ce résultat est à rapprocher de celui de **[DS98]** où les conditions de quasi-minimalité n'ont rien à voir avec celles qui nous intéressent ici mais où certains arguments sont similaires aux nôtres (voir aussi **[DS00]** où d'autres conditions sont étudiées). Le même type de résultats quantitatifs et uniformes a par ailleurs été obtenu dans le cadre de l'étude des minima de la fonctionnelle de Mumford-Shah où il s'agit d'étudier un problème de discontinuité libre (**[DMS92]**, **[DS96a]**, **[DS96b]**, **[Sol97]**, ...) et bien que ce problème soit différent du nôtre, les résultats sont comparables dans leur esprit.

Comme nous l'avons brièvement mentionné plus haut et bien que ce soit l'aspect purement mathématique du problème qui nous intéresse ici, c'est un modèle physique décrit par F. Otto qui nous a servi de motivation initiale (**[Ott98]**). Une goutte de fluide visqueux ferromagnétique et incompressible est placée entre deux lamelles horizontales très proches (pour rendre le problème plan), on lui applique un champ magnétique vertical et on cherche à décrire ce qui se passe à l'équilibre, c'est-à-dire quand le minimum d'énergie est atteint. F. Otto s'était quant à lui intéressé au problème dynamique. Mathématiquement, on considère la généralisation en dimension quelconque de ce problème et il s'agit alors de décrire les minima de mesure de Lebesgue fixée d'une énergie E définie par

$$E(G) = H^{n-1}(\partial G) + \iint_{G\times G} K(x-y)\, dx\, dy$$

pour tout $G \subset \mathbb{R}^n$, où $H^{n-1}(\partial G)$ désigne la mesure de Hausdorff de dimension $n-1$ de la frontière de G et $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est à support compact. Le premier terme correspond à la tension superficielle et est un terme de cohésion. Le second correspond à l'effet du champ magnétique et est un terme de dispersion.

Il se trouve que les résultats classiques de semi-continuité et de compacité ne s'appliquent pas directement et ce problème de minimisation avec contrainte de volume fournit un exemple de problème variationnel pour lequel des informations quantitatives et uniformes se révèlent particulièrement utiles. Nous obtiendrons en effet grâce à elles l'existence d'ensembles optimaux ainsi qu'une description des composantes connexes des minima, notamment une estimation uniforme sur leur mesure de Lebesgue.

La suite de ce mémoire est organisée de la manière suivante. Les parties 1.1, 1.2 et 1.3 du chapitre 1 sont consacrées à des rappels de théorie de la rectifiabilité et de théorie des fonctions à variation bornée et des ensembles à périmètre fini. Dans la partie 1.4 on définit les conditions de quasi-minimalité qui vont nous intéresser et on cite les principaux résultats de ce mémoire. Les chapitres 2, 3 et 4 sont consacrés à leur démonstration. On peut se reporter au paragraphe 1.4.3 pour plus de détails. Le chapitre 5 est consacré à l'étude du problème de minimisation à volume fixé associé à la fonctionnelle E définie plus haut.

C'est un plaisir de remercier Guy David de m'avoir introduite à ces questions ainsi que pour de nombreuses discussions et de précieux conseils sur le sujet. Je tiens aussi à remercier le referee dont les remarques ont largement influencé la version définitive de ce manuscrit.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Les parties 1.1, 1.2 et 1.3 de ce chapitre sont consacrées à des préliminaires et rappels sur la mesure de Hausdorff, la notion de rectifiabilité uniforme, sur les fonctions à variation bornée et les ensembles à périmètre fini, ainsi que sur différentes versions de l'inégalité isopérimétrique. On se contentera ici de rappeler les résultats, pour la plupart classiques, dont on se servira dans la suite. On ne prétend donc en aucun cas à l'exhaustivité. Le seul résultat réellement nouveau est un lemme d'approximation des ensembles quasi-isopérimétriques par des boules (lemme 1.3.13). Dans la partie 1.4 on définit les conditions de quasi-minimalité qui vont nous intéresser et on cite les principaux résultats de ce mémoire. On peut se reporter au paragraphe 1.4.3 pour une description des chapitres 2, 3 et 4 où ils seront démontrés.

1.1. Notations et conventions

Dans toute la suite n désignera un entier supérieur ou égal à 2. Nous allons travailler dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Si x et y sont deux points de $\mathbb{R}^n$, la distance entre x et y est $\mathrm{dist}(x,y) = |x-y|$. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est non vide, le diamètre de A est $\mathrm{diam}(A) = \sup_{x\in A, y\in A} |x-y|$. Si $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \subset \mathbb{R}^n$ est non vide, la distance de x à A est

$$\mathrm{dist}(x,A) = \inf_{y\in A} |x-y|.$$

Les boules ouvertes et fermées de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon r, $0 < r < +\infty$, seront notées

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r\},$$
$$\overline{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| \leq r\},$$

et pour $x = 0$, nous noterons $B_r = B(0,r)$. Pour $A \subset \mathbb{R}^n$ et $0 < t < +\infty$, nous utiliserons la notation $tA = \{tx : x \in A\}$. Pour $A \subset \mathbb{R}^n$, ∂A désignera la frontière topologique de A et χ_A la fonction caractéristique de A, égale à 1 sur A et à 0