PANORAMAS ET SYNTHÈSES 51

REAL ALGEBRAIC GEOMETRY

F. Mangolte, J.-P. Rolin, K. Kurdyka,
S. Basu & V. Powers

K. Bekka, G. Fichou, J.-P. Monnier & R. Quarez, eds.

Société mathématique de France 2017
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Frédéric Mangolte
LUNAM Université, LAREMA, Université d'Angers, France
E-mail : `frederic.mangolte@univ-angers.fr`

Jean-Philippe Rolin
IMB, Université de Bourgogne, Dijon, France
E-mail : `rolin@u-bourgogne.fr`

Krzysztof Kurdyka
Laboratoire de Mathématiques, UMR 5175 du CNRS, Université de Savoie Mont-Blanc, Campus Scientifique, 73 376 Le Bourget-du-Lac Cedex, France
E-mail : `kurdyka@univ-savoie.fr`

Saugata Basu
Department of Mathematics, Purdue University, West Lafayette, IN 47907, U.S.A.
E-mail : `sbasu@math.purdue.edu`

Victoria Powers
Department of Mathematics and Computer Science, Emory University, Atlanta, GA 30322, U.S.A.
E-mail : `vicki@mathcs.emory.edu`

2000 *Mathematics Subject Classification.* — 03C64, 11G99, 11U09, 14A10, 14P10, 14P15, 14P25, 14Pxx, 26E10, 32B10, 68W30.

***Mots-clé et phrases.* —** 17e problème de Hilbert, algorithmes, anneau de Grothendieck, application rationnelle continue, application régulue, cartes routières, certificats de positivité, classification des germes analytiques, Complexité, difféomorphisme birationnel, éclatement, élimination des quantificateurs, ensembles algébriques réels, ensembles semi-algébriques, ensembles symétriques par arcs, espaces des arcs, fonctions zêta, géométrie diophantienne, groupe d'automorphismes, modèle rationnel, nombres de Betti, nombres de Betti virtuels, polynômes hyperboliques, polynômes positifs, Positivstellensätze, quasianalyticité, sommes de carrés, structures o-minimales, surface algébrique rationnelle, surface topologique.

REAL ALGEBRAIC GEOMETRY

F. Mangolte, J.-P. Rolin, K. Kurdyka, S. Basu & V. Powers

K. Bekka, G. Fichou, J.-P. Monnier & R. Quarez, eds.

***Abstract.* —** In this volume of *Panoramas et Synthèses* we present an overview of the research in real algebraic geometry. An introduction and five survey articles compose this volume. The topics are : real rational surfaces, o-minimal geometry, analytic arcs and real analytic singularities, algorithms in real algebraic geometry, positive polynomials and sums of squares.

This volume is adressed to a wide audience : students, young researchers in the field and also researchers non-experts in real algebraic geometry.

***Résumé.* —** Nous présentons dans ce volume de *Panoramas et Synthèses* un état des lieux de la recherche en géométrie algébrique réelle. Une introduction et cinq articles de synthèses composent ce volume. Les thématiques abordées sont : surfaces rationnelles réelles, géométrie o-minimales, arcs analytiques et singularités analytiques réelles, algorithmes en géométrie algébrique réelle, polynômes positifs et sommes de carrés.

Ce volume s'adresse à un large public : les étudiants, les jeunes chercheurs dans le domaine et également les chercheurs confirmés non-spécialistes en géométrie algébrique réelle.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉS DES ARTICLES

On survole les résultats récents sur les surfaces rationnelles réelles en insistant plus particulièrement sur les liens entre leur topologie et leur géométrie birationnelle.

Nous considérons divers aspects de la théorie des structures o-minimales, et ses applications à différents domaines, depuis les équations différentielles jusqu'à la géométrie diophantienne. En particulier, nous illustrons plusieurs méthodes analytiques et géométriques développées dans les preuves d'o-minimalité.

On présente dans ce texte les avancées récentes en théorie des singularités réelles. On donne notamment de nouvelles méthodes de classification des germes de fonctions analytiques réelles. Les notions d'équivalences blow-analytique et arc-analytique sont apparues dans les années 80 du siècle dernier. L'utilisation de nouvelles méthodes inspirées de la théorie de l'intégration motivique, a donné, pendant ces 15 dernières années, des résultats majeurs portant sur ces 2 notions d'équivalence. Cette nouvelle approche utilise la théorie des ensembles symétriques par arcs ainsi que les notions de nombres de Betti virtuels et de polynôme de Poincaré virtuel. Ces techniques produisent de nouveaux invariants fins pour les germes de fonctions analytiques réelles.

On expose dans ce texte les résultats anciens et récents en théorie algorithmique de la géometrie algébrique réelle. On commence par décrire des méthodes effectives d'élimination des quantificateurs dans la théorie réelle du premier ordre initiée par Tarski et Seidenberg. On aborde également les problèmes liés à cette théorie. On décrit ensuite les algorithmes récents permettant de calculer des invariants topologiques des ensembles semi-algébriques. On s'intéresse plus particulièrement à la complexité de ces algorithmes. On analyse ensuite les liens entre la complexité des problèmes de décisions dans la théorie réelle du premier ordre et le calcul de certains invariants topologiques des ensembles semi-algébriques. On évoque finalement un volet plus numérique de cette théorie avec les méthodes d'optimisation en programmation semi-définie.

Un polynôme réel f qui est une somme de carrés de polynômes réels est clairement positif sur $\mathbb{R}^n$. L'écriture de f comme somme de carrés est donc un certificat de positivité pour f. En généralisant ce type de remarques, de nombreux résultats théoriques mais aussi calculatoires ont été obtenus concernant les polynômes positifs. Dans ce texte, on revient sur l'historique du sujet et on décrit les résultats récents, théoriques et algorithmiques, liés aux certificats de positivité.

ABSTRACTS

We survey recent results on real rational surfaces focusing on the links between their topology and their birational geometry.

We analyze some aspects of the theory of o-minimal structures, and its applications to various contexts, from differential equations to diophantine geometry. In particular, we illustrate on various examples several analytic and geometric methods involved in the proofs of o-minimality.

The aim of this survey is to present recent development in real singularities with emphasis on new methods of classification of real analytic function germs. The concepts of a blow-analytic or of an arc-analytic equivalence have emerged back in the 80's of the last century, however an important progress has been made in last 15 years thanks to the new methods inspired by the motivic integration approach. Application of this idea to the real context has been made possible in particular due to the introduction of arc symmetric sets, virtual Betti numbers and the virtual Poincaré polynomial. These new techniques have been then used to construct various subtle invariants of real analytic function germs.

We survey both old and new developments in the theory of algorithms in real algebraic geometry—starting from effective quantifier elimination in the first order theory of reals due to Tarski and Seidenberg, to more recent algorithms for computing topological invariants of semi-algebraic sets. We emphasize throughout the complexity aspects of these algorithms and also discuss the computational hardness of the underlying problems. We also describe some recent results linking the computational hardness of decision problems in the first order theory of the reals, with that of computing certain topological invariants of semi-algebraic sets. Even though we mostly concentrate on exact algorithms, we also discuss some numerical approaches involving semi-definite programming that have gained popularity in recent times.

If a real polynomial f can be written as a sum of squares of real polynomials, then clearly f is nonnegative on $\mathbb{R}^n$, and an explicit expression of f as a sum of squares is a certificate of positivity for f. This idea, and generalizations of it, underlie a large body of theoretical and computational results concerning positive polynomials and sums of squares. In this survey article, we review the history of the subject and give an overview of recent results, both theoretical results concerning the existence of certificates of positivity and work on computational and algorithmic issues.

INTRODUCTION : LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE RÉELLE

Karim Bekka, Goulwen Fichou,
Jean-Philippe Monnier & Ronan Quarez

La géométrie algébrique réelle tire son origine des questions spécifiquement réelles liées à la géométrie algébrique telle qu'elle est pratiquée au XIX^e siècle. Dans la célèbre liste de problèmes datant de 1900 du mathématicien David Hilbert, problèmes qui donnent un cadre à une grande partie des recherches mathématiques durant la première moitié du XX^e siècle, on trouve deux questions qui lui sont spécifiquement dévolues : les 16^e et 17^e problèmes.

Le 16^e problème concerne, dans sa première partie, la topologie des courbes algébriques réelles. Il s'agit d'étudier les positions relatives des composantes connexes, appelées ovales, des courbes algébriques réelles. Cette question demande à préciser le résultat de Harnack de 1876 qui donne une majoration optimale du nombre d'ovales d'une courbe algébrique réelle en fonction de son degré. Petrovskii, Thom et Arnold ont apporté des contributions marquantes sur ce sujet qui reste ouvert actuellement.

Le 17^e problème concerne l'algèbre réelle : il s'agit de savoir si un polynôme à coefficient réels en n variables et positif sur tout $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme une somme de carrés de fonctions rationnelles. Ce problème est résolu par Artin en 1927 et ouvre la voie à l'algèbre réelle moderne telle qu'elle est formalisée actuellement. Depuis, de nombreuses variantes du 17^e problème sont établis dans des contextes variés : pour les fonctions analytiques réelles, lorsque le polynôme est positif seulement sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ décrit par des inégalités polynomiales, etc.

D'un autre côté, en 1951 Tarski montre que la théorie du premier ordre des corps réels clos admet l'élimination des quantificateurs, résultat qui peut se reformuler par le fait que les ensembles semi-algébriques (décrits par des systèmes d'inégalités polynomiales) sont stables par projection. Ce résultat peut être vu comme le point de départ des interactions de la géométrie algébrique réelle avec la théorie des modèles.

Depuis lors, la géométrie algébrique réelle ne cesse de se développer dans ces différentes directions (topologie, algèbre, logique...), rendant nécessaire un état des lieux de la discipline. C'est ainsi qu'entre 1980 et 2005, quelques livres de référence apparaissent : l'ouvrage introductif de Benedetti et Risler **[6]** ainsi que l'ouvrage de synthèse de Bochnak, Coste et Roy devenu la référence du domaine ([**7**] ou [**8**] pour la version anglaise). Plus tard, Andradas, Bröcker et Ruiz publient un ouvrage centré sur l'algèbre réelle [**3**], tandis que Basu, Pollack et Roy livrent une synthèse des aspects algorithmiques présents dans la géométrie algébrique réelle [**5**].

Le but du présent ouvrage est de dresser un état des lieux plus actuel de la géométrie algébrique réelle. En raison des articles de synthèse récents déjà existants de Welschinger [**50**] sur la géométrie énumérative réelle et de Mangolte [**36**] sur la topologie des variétés algébriques réelles de dimension trois, ce sont les cinq thématiques suivantes qui ont été retenues : surfaces rationnelles réelles, géométrie o-minimale, arcs analytiques et singularités analytiques réelles, algorithmes en géométrie algébrique réelle, polynômes positifs et sommes de carrés.

Mentionnons pour terminer que la particularité de travailler sur le corps des nombres réels donne lieu à de multiples applications de la géométrie algébrique réelle avec divers champs disciplinaires provenant des mathématiques pures et appliquées. Voici quelques exemples de ces applications émergentes :

– la géométrie tropicale et ses liens avec la combinatoire et les modèles statistiques (des objets tropicaux apparaissent naturellement dans la cristallographie et la biologie quantitative) [**39**],
– la théorie des singularités réelles et ses applications à la robotique [**13**], [**27**],
– la théorie des moments en analyse et ses applications à l'optimisation polynômiale [**1**],
– les inégalités linéaires matricielles et les semi-algébriques convexes qui ont des applications à la théorie du contrôle [**2**].

Nous remercions les auteurs des articles de synthèse : S. Basu, K. Kurdyka, F. Mangolte, V. Powers, J-P. Rolin. Nous remercions aussi J. Huisman pour sa participation initiale au projet de ce volume.

1. Topologie des variétés algébriques réelles

Une spécificité de la géométrie algébrique réelle consiste à relier l'étude des variétés algébriques réelles, donc définies par des équations à coefficients réels, à la topologie des points réels de ces variétés, c'est-à-dire aux solutions réelles de ces équations. L'illustration la plus emblématique de ce phénomène se retrouve dans la première partie du 16$^{\text{e}}$ problème de Hilbert concernant la classification des courbes algébriques réelles planes, et plus spécifiquement la position relative des différentes composantes connexes, aussi appelées ovales. Gudkov [**22**] a ainsi résolu le cas particulier posé par Hilbert de la compréhension des emboitements possibles des ovales d'une courbe de degré six dans $\mathbb{P}^2$, mais on ne connaît toujours pas la classification générale à partir du degré huit.

Plus généralement, la question de la détermination de la topologie de la partie réelle d'une variété algébrique réelle, seule ou en famille, est une question centrale qui a connu récemment des avancées remarquables en dimension deux et trois. Commençons par la dimension trois, pour laquelle Kollár contredit la conjecture de Nash (on peut lire **[36]** pour en comprendre la stratégie) en étudiant une classe de variétés généralisant les variétés rationnelles. Une variété est dite rationnelle si elle contient une copie d'un espace affine qui est dense pour la topologie de Zariski, ou encore si elle est birationnelle à un espace projectif. Cette classe plus générale est celle des variétés uniréglées, qui sont définies comme étant dominées par un cylindre ; plus précisément une variété X de dimension d est uniréglée s'il existe une application rationnelle $Y \times \mathbb{P}^1 \to X$ définie sur un produit de la droite projective avec une variété Y de dimension $d-1$, dont l'image est dense dans X pour la topologie de Zariski. Des résultats de classification topologique existent aussi en dimension trois, et notamment celle des variétés uniréglées est presque achevée, en s'appuyant sur la caractère lagrangien de la variété symplectique obtenue en considérant les points complexes d'une variété algébrique réelle. Des résultats provenant de la géométrie symplectique vont donc s'appliquer en géométrie réelle et Viterbo **[49]** montre par exemple qu'aucune composante connexe du lieu réel d'une variété projective réelle lisse, uniréglée, de dimension au moins trois, n'admet de métrique hyperbolique. Pour plus de détails, nous renvoyons à l'article de synthèse de Kharlamov **[26]**.

Dans le cas des surfaces, la topologie de la variété ainsi que de ses déformations sont connues pour de nombreux exemples de surfaces (voir encore **[26]** pour des exemples précis). Intéressons-nous dorénavant au cas des surfaces rationnelles réelles qui font l'objet de l'article de Mangolte dans le présent ouvrage. Une surface algébrique réelle est donc rationnelle si elle contient une sous-variété, dense pour la topologie de Zariski, isomorphe au plan affine. Les exemples les plus simples de telles surfaces sont le plan projectif réel, un produit de deux droites projectives réelles ou encore la quadrique d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. On en déduit en particulier que tout éclatement d'une de ces surfaces en des points réels reste une surface rationnelle.

Un résultat célèbre de Comessatti **[11]** décrit la topologie du lieu réel d'une surface rationnelle orientable, qui se trouve être difféomorphe à un tore ou une sphère. Inversement, ces deux surfaces topologiques sont bien réalisables comme le lieu réel de surfaces rationnelles réelles (on appelle cela un modèle algébrique de la surface topologique), et c'est aussi le cas de toute surface topologique compacte connexe qui n'est pas orientable. Mieux encore, il existe à isomorphisme près un unique tel modèle algébrique dans le cas non orientable, comme l'explique Mangolte en s'appuyant sur le programme des modèles minimaux ainsi que sur la transitivité du groupe des difféomorphismes birationnels. Ces difféomorphismes birationnels sont une généralisation des automorphismes de la variété, plus précisément ils sont définis comme les fonctions birationnelles admettant un prolongement de classe C^∞ au voisinage de leurs pôles. Mangolte nous montre que ces difféomorphismes birationnels forment un groupe riche dans le cadre des surfaces rationnelles réelles, au point qu'il agit transitivement (et même infiniment transitivement) sur le lieu des points réels. De plus, ce groupe est dense dans le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ du lieu réel.

L'article de Mangolte met en avant la diversité des classes de fonctions intervenant dans l'étude des variétés algébriques réelles, des fonctions continues aux morphismes algébriques, en passant par les applications rationnelles de classe C^∞. Il conclut son article par la présentation succinte d'un axe de recherche récent concernant l'étude des fonctions rationnelles admettant cette fois un prolongement continu (ou de classe C^k) au lieu réel de la variété algébrique réelle considérée. Kucharz [**31**] a initié l'étude de ces fonctions en montrant qu'elles permettent de réaliser tous les types d'homotopie des applications continues entre sphères, alors que Kollár et Nowak [**30**] en décrivent des propriétés surprenantes concernant notamment leur restriction à une sous-variété, lorsqu'elles sont définies sur une variété singulière (dont le lieu lisse est dense pour la topologie euclidienne). L'article [**19**] développe leur étude systématique dans le contexte des variétés lisses.

2. Géométrie modérée et singularités

2.1. Structures o-minimales. – En géométrie algébrique sur un corps algébriquement clos, lorsque une variété algébrique affine est projetée dans un espace affine, l'image est une combinaison booléenne finie de variétés algébriques, (i.e. obtenue à partir des ensembles algébriques en prenant des réunions finies, intersections finies et complémentaires). La situation est moins simple pour les variétés algébriques sur le corps des réels. Par exemple, les projections de l'hyperbole $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,xy=1\}$ et celle du cercle $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;x^2+y^2=1\}$ sur l'axe des x, ne sont pas des ensembles algébriques de $\mathbb{R}$. Ainsi, lorsque l'on étudie des variétés sur les réels, on est amené à considérer aussi les inégalités polynomiales. On dit qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est *semi-algébrique* s'il s'agit d'une combinaison booléenne finie d'ensembles définis par des équations de type $P(x_1,\ldots,x_n)=0$ et d'inéquations $Q(x_1,\ldots,x_n)>0$, où P et Q sont des polynômes. On peut voir que tout ensemble semi-algébrique est la projection d'une variété algébrique réelle dans un espace affine de plus grande dimension. Le principe de Tarski-Seidenberg affirme que si $X\subseteq\mathbb{R}^n$ est semi-algébrique et $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ est une application polynomiale, alors l'image de X par f est semi-algébrique [**7**]. Comme conséquence, l'adhérence d'un ensemble semi-algébrique est encore semi-algébrique. Les ensembles semi-algébriques ont des propriétés topologiques et géométriques « modérées » ([**7**], [**6**]), par exemple :

i) Stratification : tout ensemble semi-algébrique, admet une partition finie en sous-ensembles semi-algébriques, telle que chaque strate est une variété analytique connexe. En particulier, tout ensemble semi-algébrique a un nombre fini de composantes connexes et la frontière d'un ensemble semi-algébrique est un ensemble semi-algébrique de plus petite dimension.
ii) Toute application semi-algébrique i.e. dont le graphe est un sous-ensemble semi-algébrique, est lisse par morceaux : il existe un stratification de la source telle que la restriction de l'application à chaque strate soit analytique.

iii) Triangulation : Tout ensemble semi-algébrique admet une triangulation semi-algébrique i.e. il existe un homéomorphisme semi-algébrique du semi-algébrique sur une union de simplexes ouverts d'un complexe simplicial fini.
iv) Finitude du type topologique : une famille semi-algébrique d'ensembles semi-algébriques n'a qu'un nombre fini de types topologiques.

Soit M une variété analytique réelle. On dit que $X \subseteq M$ est *semi-analytique* si pour tout $a \in M$ il existe un voisinage U de a tel que $X \cap U$ est une union finie d'ensembles $\{x \in U : f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0, g_1(x) > 0, \ldots, g_k(x) > 0\}$ où $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_k$ sont analytiques sur U.

Les ensembles semi-analytiques ne sont pas stables par projection, contrairement aux semi-algébriques, comme le montre l'exemple de Osgood (**[40]**), l'ensemble $Y = \{(x, y, z) \in [-1, 1]^3, \exists w \in [-1, 1], x = yw, \text{ et } z = ye^w\}$ n'est pas semi-analytique, bien qu'il soit la projection d'un semi-analytique compact. Łojasiewicz et Hironaka ont introduit alors la classe des ensembles sous-analytiques. On dit qu'un sous-ensemble $X \subseteq M$ est *sous-analytique* si pour tout $a \in M$ il existe un voisinage U de a et un semi-analytique $Y \subseteq M \times \mathbb{R}^m$ d'adhérence compacte, tel que $U \cap X$ est la projection de Y sur M. Les ensembles sous-analytiques ne présentent en général ces propriétés topologiques modérées qu'au niveau local. Ceci mène naturellement à la détermination des classes d'ensembles qui partagent les propriétés topologiques et géométriques modérées des semi-algébriques (voir **[21]**). La théorie d'o-minimalité est une réponse à ce défi. Une *structure ordonnée* sur $\mathbb{R}$ est une suite $\mathcal{S} = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où S_n est une algèbre de Boole de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ telle que :

i) Tout sous-ensemble algébrique de $\mathbb{R}^n$ appartient à S_n.
ii) Si $A \in S_m$ et $B \in S_n$, alors $A \times B \in S_{m+n}$.
iii) Si $P : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ est la projection sur les n premières coordonnées et $A \in S_{n+1}$, alors $P(A) \in S_n$.

Si $A \in S_n$, on dit que A est un ensemble *définissable* dans la structure $\mathcal{S}$.

Par exemple, si pour tout n, S_n est l'ensemble des sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{S}$ est une structure ordonnée sur $\mathbb{R}$. Par contre les sous-analytiques ne forment pas une structure ordonnée sur $\mathbb{R}$, par exemple l'ensemble $\left\{\left(\frac{1}{n}, n\right) : n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$ appartiendrait à S_2 sans que sa projection sur la première coordonnée appartiennent à S_1. Souvent, nous spécifions une structure en considérant la plus petite structure pour laquelle certains ensembles donnés sont définissables ; on commence par une famille T_n, de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, et on cherche à déterminer la plus petite structure $\mathcal{S}$ telle que $T_n \subseteq S_n$ pour tout n.

On souhaite déterminer les structures ordonnées dont les ensembles définissables sont « modérés ». Par exemple, la plus petite structure ordonnée contenant les semi-algébriques et l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, contient tout sous-ensemble borélien de $\mathbb{R}^n$ (**[25]**). Ainsi, même les plus simples structures ordonnées peuvent avoir des ensembles définissables très compliqués.