





**INTRODUCTION  
À L'ÉTUDE DES ESPACES DE BANACH**

**ANALYSE ET PROBABILITÉS**

**Daniel Li  
Hervé Queffélec**

### Comité de rédaction

Jean-Benoît BOST  
François LOESER

Joseph OESTERLÉ

Daniel BARLET (dir.)

### Diffusion

Maison de la SMF  
B.P. 67  
13274 Marseille Cedex 9  
France  
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
www.ams.org

EDP Sciences  
17, avenue du Hoggar  
91944 les Ulis cedex A  
France  
www.edpsciences.com

### Tarifs 2004

Vente au numéro : 72 € (\$ 104)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

### Secrétariat : Nathalie Christiaën

Cours Spécialisés  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2004

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 1284-6090

ISBN 2-85629-155-4

Directeur de la publication : Marie-Françoise ROY

**COURS SPÉCIALISÉS 12**

**INTRODUCTION  
À L'ÉTUDE DES ESPACES DE BANACH**

**ANALYSE ET PROBABILITÉS**

**Daniel Li  
Hervé Queffélec**

**Société Mathématique de France 2004**



## Table des matières

<b>Introduction</b> .....	ix
<b>Préliminaire. Topologies faible et préfaible. Filtrés, ultrafiltrés. Ordinaux</b> .....	1
I. Topologies faible et préfaible .....	1
II. Filtrés, ultrafiltrés. Ordinaux .....	6
III. Exercice .....	11
<b>0. Notions fondamentales de Probabilités</b> .....	13
I. Introduction .....	13
II. Convergences .....	15
III. Séries de variables aléatoires indépendantes .....	20
IV. Inégalités de Khintchine .....	28
V. Martingales .....	32
VI. Commentaires .....	39
VII. Exercices .....	40
<b>1. Bases dans les espaces de Banach</b> .....	43
I. Bases de Schauder : généralités .....	43
II. Bases et structure des espaces de Banach .....	54
III. Commentaires .....	67
IV. Exercices .....	69
<b>2. Convergence inconditionnelle</b> .....	75
I. Convergence inconditionnelle .....	75
II. Bases inconditionnelles .....	81
III. Base canonique de $c_0$ .....	85
IV. Les théorèmes de James .....	87

V. Le Théorème de dichotomie de Gowers .....	91
VI. Commentaires .....	100
VII. Exercices .....	101
<b>3. Variables aléatoires banachiques .....</b>	<b>107</b>
I. Définitions ; convergences .....	107
II. Principe de symétrie de P. Lévy et applications .....	117
III. Principe de contraction .....	121
IV. Inégalités de Kahane .....	126
V. Commentaires .....	136
VI. Exercices .....	137
<b>4. Type et cotype des espaces de Banach. Factorisation par un espace de Hilbert</b>	<b>143</b>
I. Compléments de Probabilités .....	143
II. Compléments sur les espaces de Banach .....	155
III. Type et cotype des espaces de Banach .....	160
IV. Factorisation par un espace de Hilbert et Théorème de Kwapien .....	173
V. Quelques applications des notions de type et de cotype .....	179
VI. Commentaires .....	182
VII. Exercices .....	184
<b>5. Opérateurs <math>p</math>-sommants. Applications .....</b>	<b>187</b>
Introduction .....	187
I. Opérateurs $p$ -sommants .....	188
II. Théorème de Grothendieck .....	193
III. Quelques applications de l'utilisation des opérateurs $p$ -sommants .....	202
IV. Ensembles de Sidon .....	206
V. Commentaires .....	230
VI. Exercices. ....	232
<b>6. Quelques propriétés des espaces <math>L^p</math> .....</b>	<b>237</b>
I. Espace $L^1$ .....	238
II. Le système trigonométrique .....	247
III. La base de Haar dans $L^p$ .....	254
IV. Une autre preuve du Théorème de Grothendieck .....	264
V. Commentaires .....	272
VI. Exercices .....	281
<b>7. L'espace <math>\ell_1</math> .....</b>	<b>291</b>
I. Le Théorème $\ell_1$ de Rosenthal .....	291
II. Quelques autres résultats sur les espaces contenant $\ell_1$ .....	304
III. Commentaires .....	312
IV. Exercices .....	315
<b>8. Sections euclidiennes .....</b>	<b>319</b>
I. Inégalité de concentration de la mesure .....	319



II. Comparaison des vecteurs gaussiens .....	325
III. Le Théorème de Dvoretzky .....	334
IV. Théorème de Lindenstrauss-Tzafriri .....	353
V. Commentaires .....	357
VI. Exercices .....	358
<b>9. Espaces de Banach séparables sans la Propriété d'Approximation .....</b>	<b>363</b>
I. Introduction et définitions .....	363
II. Les réductions de Grothendieck .....	364
III. Les contre-exemples d'Enflo et Davie .....	370
IV. Commentaires .....	378
V. Exercices .....	379
<b>10. Processus gaussiens .....</b>	<b>381</b>
I. Processus gaussiens .....	381
II. Mouvement brownien .....	385
III. Théorème de majoration de Dudley .....	387
IV. Théorème de minoration de Fernique pour les processus stationnaires ...	392
V. Théorème d'Elton-Pajor .....	400
VI. Commentaires .....	423
VII. Exercices .....	424
<b>11. Sous-espaces réflexifs de <math>L^1</math> .....</b>	<b>427</b>
I. Structure des sous-espaces réflexifs de $L^1$ .....	428
II. Exemples de sous-espaces réflexifs de $L^1$ .....	439
III. Théorème de factorisation de Maurey et Théorème de Rosenthal .....	446
IV. Sous-espaces de dimension finie de $L^1$ .....	452
V. Commentaires .....	467
VI. Exercices .....	470
<b>12. Quelques exemples d'utilisation de la méthode des sélecteurs .....</b>	<b>481</b>
I. Extraction d'ensembles quasi-indépendants .....	481
II. Sommes de sinus et transformation de Hilbert vectorielle .....	501
III. Minoration de la constante de $K$ -convexité .....	505
IV. Commentaires .....	510
V. Exercices .....	511
<b>13. Espace de Pisier des fonctions presque sûrement continues. Applications ...</b>	<b>515</b>
I. Introduction .....	515
II. Compléments sur les variables banachiques .....	516
III. Espace $\mathcal{E}^{ps}$ .....	523
IV. Applications de l'espace $\mathcal{E}^{ps}$ .....	537
V. Théorème de Bourgain-Milman .....	544
VI. Commentaires .....	556
VII. Exercices .....	560

<b>Annexe. Algèbres de Banach. Groupes abéliens compacts</b> .....	563
I. Algèbres de Banach .....	563
II. Groupes abéliens compacts .....	569
<b>Bibliographie</b> .....	585
Livres .....	585
Articles .....	589
<b>Index des notations</b> .....	615
<b>Index des noms cités</b> .....	617
<b>Index terminologique</b> .....	621