COURS SPÉCIALISÉS 5

UNE INITIATION AUX INÉGALITÉS DE SOBOLEV LOGARITHMIQUES

Gilles Royer

Société Mathématique de France 1999

Gilles Royer
Département de mathématiques, université d'Orléans, B.P. 6759,
45067 Orléans Cedex 2, France.
E-mail : `Gilles.Royer@labomath.univ-orleans.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 47A35, 60J60, 60K35, 35J85, 82C20.
***Mots clefs.* —** log-Sobolev, Gibbs, diffusion process.

UNE INITIATION AUX INÉGALITÉS DE SOBOLEV LOGARITHMIQUES

Gilles Royer

Résumé. **—** Le but de ce cours est d'illustrer l'usage des inégalités de Sobolev logarithmiques en les appliquant à l'ergodicité des systèmes de spins en faible interaction. Ce modèle a été inspiré par les modèles bien moins simples de la théorie des champs pour lesquels E. Nelson a introduit les propriétés d'hypercontractivité qui ont été développées par L. Gross à l'aide de la notion d'inégalité de Sobolev logarithmique. La considération de systèmes de spins réels conduit à des difficultés techniques supplémentaires par rapport au cas des spins bornés, mais permet souvent d'utiliser des outils mathématiques plus familiers et plus variés. On n'aborde qu'un aspect limité du vaste domaine des mesures de Gibbs, bien qu'il soit un important développement, dû à B. Zegarlinski, d'une des idées fondamentales de R.L. Dobrushin. En chemin, on introduit la plupart des notions de base qui seront utiles sur les opérateurs autoadjoints, les processus de diffusions, les mesures de Gibbs. Des compléments et des exercices permettent d'élargir le domaine traité.

Abstract **(A first course on logarithmic Sobolev inequalities). —** This course is an introduction to logarithmic Sobolev inequalities. We aim to present how they are used to prove the ergodicity of unbounded spins systems under weak interactions. This kind of models was considered in the far more difficult context of field theory, where E. Nelson proved the hypercontractivity property which motivated L. Gross to introduce logarithmic Sobolev inequalities. The unboundedness of the spins causes some technical difficulties, but also leads to use more familiar and varied tools than in the case of finite or bounded spins. We consider only a narrow angle in the wide domain of Gibbs measures, but it is an important development by B. Zegarlinski of one of R.L. Dobrushin's fundamental ideas. We also try to provide most of the basic notions needed for, as self-adjoint operators, diffusions processes and Gibbs measures. Some complements and exercises help to enlarge the domain dealt with.

PRÉFACE

Le présent cours est pour l'essentiel un cours de troisième cycle effectué au second semestre 1996-1997 à l'université d'Orléans. Le but en était d'exposer un exemple d'utilisation des inégalités de Sobolev logarithmiques tiré essentiellement des travaux [**71**] et [**72**] de B. Zegarlinski. Il s'agit des modèles de spins réels en faible interaction sur un réseau, modèles auxquels s'applique une méthode classique de R.L. Dobrushin, voir notamment [**20**]. Pour ces modèles, on étudie une démonstration de l'unicité de la mesure de Gibbs, en montrant la stabilisation exponentielle d'une évolution stochastique donnée par un processus de diffusion en dimension infinie qui généralise la dynamique de Glauber du modèle d'Ising. Bien que ces modèles offrent des complications techniques quelquefois parasites par rapport au modèle d'Ising, ils présentent l'intérêt d'utiliser les calculs dans un cadre tout à fait familier : on peut ainsi construire et étudier les processus de diffusions qui les font évoluer grâce aux notions les plus simples du calcul d'Itô, utiliser des propriétés bien connues des opérateurs autoadjoints dans $\mathbb{R}^d$, et les inégalités de Sobolev ou de Poincaré y apparaissent dans leur cadre originel. Ces modèles utilisent aussi de manière naturelle des résultats élégants sur les inégalités de Sobolev logarithmiques, tels que l'inégalité de Bakry et Émery ou l'inégalité de Herbst. De plus ce sont des modèles très simplifiés des champs euclidiens de Nelson qui ont motivés l'introduction des inégalités de Sobolev logarithmiques par Gross. Ce cours introduit les notions de base : opérateurs autoadjoints, processus de diffusion, mesures de Gibbs, de manière presque autonome. Le chapitre sur les inégalités de Sobolev logarithmiques est enrichi d'allusions aux applications aux chaînes de Markov pour ne pas rester dans un cadre trop particulier. On trouvera à la fin du cours quelques indications sur les nombreux développements récents de la méthode des inégalités de Sobolev logarithmiques en mécanique statistique, dont un semestre d'étude du centre É. Borel s'est fait l'écho.

Je remercie mes collègues S. Roelly et P. Maheux pour des échanges très utiles, ainsi que les étudiants du DEA d'Orléans, en particulier G. Salin.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

OPÉRATEURS AUTOADJOINTS

On désigne par $H, \langle\cdot,\cdot\rangle$ un espace de Hilbert complexe[1], séparable, par $\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel dense dans H et par A un opérateur de $\mathcal{D}$ vers H. L'espace $\mathcal{D}$ est appelé le domaine de l'opérateur A et est noté $D(A)$. Contrairement à ce qui se passe pour les opérateurs bornés[2], en particulier en dimension finie, la simple considération de la symétrie des opérateurs ne conduit pas à un théorème de décomposition spectrale. Nous allons introduire la notion d'autoadjonction directement par des considérations spectrales suivant un exposé de P. Cartier à l'École polytechnique.

1.1. Opérateurs symétriques

Définition 1.1.1. — On dit que le nombre complexe λ est dans l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A, si $(\lambda\,\mathrm{Id}-A)$ est injectif, son image $(\lambda\,\mathrm{Id}-A)\mathcal{D}$ est dense dans H et si l'opérateur inverse $(\lambda\,\mathrm{Id}-A)^{-1}$ est borné de $(\lambda\,\mathrm{Id}-A)\mathcal{D}$ vers H, donc se prolonge en un opérateur R_λ de H dans lui-même, appelé opérateur résolvant.

On abrégera souvent $A-\lambda\,\mathrm{Id}$ par $A-\lambda$.

Proposition 1.1.2. — *Pour tous λ et μ dans l'ensemble résolvant on a :*

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda-\mu)R_\mu R_\lambda. \qquad \text{(équation résolvante)}$$

L'équation résolvante implique en particulier que les opérateurs résolvants commutent entre eux.

Définition 1.1.3. — On dit que A est fermé si $\mathcal{D}$ est complet pour la norme

$$\|\psi\|_A = \left(\|\psi\|^2 + \|A\psi\|^2\right)^{1/2}.$$

Considérons le graphe de A,

$$\mathcal{G}_A = \{(\psi, A\psi) \in H\times H \;:\; \psi\in\mathcal{D}\};$$

---

[1] Le produit scalaire sera linéaire à gauche et antilinéaire à droite.

[2] On rappelle qu'un opérateur B est borné s'il existe une constante M telle que $\|Bx\| \leqslant M\|x\|$ pour tout x dans $\mathcal{D}$; il est clair qu'alors on peut prolonger B en un opérateur sur $\overline{\mathcal{D}} = H$.

la projection est une isométrie du graphe muni de la norme hilbertienne produit sur $\mathcal{D}$ muni de $\|\cdot\|_A$. Ainsi il apparaît que A est un opérateur fermé si et seulement si le graphe $\mathcal{G}_A$ est une partie fermée de $H \times H$. Pour un opérateur fermé on exprime de manière plus simple l'ensemble résolvant.

Proposition 1.1.4. — *Soit A fermé. Pour que λ soit dans $\rho(A)$, il faut et il suffit que l'une des deux conditions suivantes soient réalisées :*

1° *L'application $(\lambda - A)$ est une bijection de $\mathcal{D}$ sur H.*
2° *Il existe un opérateur borné R_λ de H tel que :*

$$\begin{cases} R_\lambda \circ (\lambda - A) = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \\ (\lambda - A) \circ R_\lambda = \mathrm{Id}_H \, . \end{cases} \tag{1}$$

Démonstration
1° Pour montrer la nécessité de la condition il reste à montrer que si $\lambda \in \rho(A)$ alors $\mathrm{Im}(\lambda - A) = H$. Comme cette image est dense on peut toujours trouver, pour $x \in H$ une suite y_n d'éléments de $\mathcal{D}$ telle que $x = \lim(\lambda y_n - Ay_n)$. En appliquant l'opérateur borné R_λ, on en déduit que $y_n = R_\lambda(\lambda - A)y_n$ converge ; comme à la fois y_n et Ay_n convergent, et que $\mathcal{G}_A$ est fermé, la limite y de y_n est dans $\mathcal{D}$ et $\lim(Ay_n) = Ay$ d'où l'on tire $\lambda y - Ay = x$. Comme x est arbitraire, on a obtenu $(\lambda - A)\mathcal{D} = H$.

Supposons maintenant que $\lambda - A$ soit une bijection. Elle est continue de l'espace de Hilbert $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_A)$ vers l'espace de Hilbert H. Par le théorème de l'application ouverte de Banach, l'application inverse est continue et reste évidemment continue si on munit $\mathcal{D}$ de la norme moins fine $\|\cdot\|_H$.
2° Ces conditions sont équivalentes à la définition initiale, compte tenu du fait que $\lambda - A$ est surjectif si son image est dense. □

Les opérateurs autoadjoints sont une classe d'opérateurs symétriques, un opérateur symétrique étant un opérateur A de domaine $\mathcal{D}$ vérifiant

$$\forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{D} \quad \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle.$$

Ils sont souvent définis naturellement sur des domaines trop restreints pour que l'opérateur soit fermé, l'exemple de base étant le laplacien Δ défini au départ, disons sur $\mathcal{D} = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact sur $\mathbb{R}^n$. Mais ces opérateurs sont facilement fermables, au sens suivant :

Proposition 1.1.5. — *L'adhérence dans $H \times H$ du graphe d'un opérateur symétrique A défini sur $\mathcal{D}$ est le graphe d'un opérateur $\overline{A}$ défini sur un domaine $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$, la fermeture de A. Les ensembles résolvants et les opérateurs résolvants sont les mêmes pour l'opérateur et sa fermeture.*

Démonstration. — Montrons que $\overline{\mathcal{G}}_A$ est un graphe. Il faut montrer que l'hypothèse $(\varphi, \psi) \in \overline{\mathcal{G}_A}$ et $(\varphi, \psi') \in \overline{\mathcal{G}_A}$ implique $\psi = \psi'$. Il existe une suite $(\varphi_n, A\varphi_n)$ qui converge vers (φ, ψ)