

# Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

**Numéro 177**    **PROJECTIONS, MULTIPLIERS**  
**Nouvelle série**    **AND DECOMPOSABLE MAPS**  
**ON NONCOMMUTATIVE  $L^p$ -SPACES**

**C. ARHANCET & C. KRIEGLER**

**2 0 2 3**

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

---

### *Comité de rédaction*

Boris ADAMCZEWSKI  
Christine BACHOC  
François CHARLES  
François DAHMANI  
Béatrice de TILLIÈRE  
Clotilde FERMANIAN

Dorothee FREY  
Wendy LOWEN  
Laurent MANIVEL  
Julien MARCHÉ  
Eva VIEHMANN

Marc HERZLICH (dir.)

### *Diffusion*

Maison de la SMF  
Case 916 - Luminy  
13288 Marseille Cedex 9  
France  
commandes@smf.emath.fr

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
www.ams.org

### *Tarifs*

*Vente au numéro* : 43 € (\$ 65)

*Abonnement électronique* : 113 € (\$ 170)

*Abonnement avec supplément papier* : 167 €, hors Europe : 197 € (\$ 296)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

### *Secrétariat*

Mémoires de la SMF  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
memoires@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2023

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN papier 0249-633-X; électronique : 2275-3230

ISBN 978-85629-971-5

doi : 10.24033/msmf.485

Directeur de la publication : Fabien DURAND

---

**PROJECTIONS, MULTIPLIERS  
AND DECOMPOSABLE MAPS  
ON NONCOMMUTATIVE  $L^p$ -SPACES**

**Cédric Arhancet  
Christoph Kriegler**

*C. Arhancet*

6 rue Didier Daurat, 81000 Albi, France.

*E-mail* : `cedric.arhancet@protonmail.com`

*C. Kriegler*

Université Clermont Auvergne, CNRS, LMBP, F-63 000 Clermont-Ferrand, France.

*E-mail* : `christoph.kriegler@uca.fr`

Soumis le 21 juin 2019, révisé le 27 janvier 2021, accepté le 11 janvier 2022.

---

**2000 Mathematics Subject Classification.** – 46L51, 46L07, 43A07, 43A15, 43A22, 43A30, 43A35, 43A40, 46L52, 47L25.

**Key words and phrases.** – Noncommutative  $L^p$ -spaces, operator spaces, regular operators, decomposable operators, Fourier multipliers, Schur multipliers, factorizable maps, complementations, Chabauty-Fell topology.

**Mots clefs.** – Espaces  $L^p$  non commutatifs, espaces d'opérateurs, opérateurs réguliers, opérateurs décomposables, multiplicateurs de Fourier, multiplicateurs de Schur, applications factorisables, complémentations, topologie de Chabauty-Fell.

---

*We dedicate this book to our families:  
Clément, Lise, Nina, Christine, Raphael and Clara.*



# PROJECTIONS, MULTIPLIERS AND DECOMPOSABLE MAPS ON NONCOMMUTATIVE $L^p$ -SPACES

Cédric Arhancet, Christoph Kriegler

*Abstract.* – We introduce a noncommutative analogue of the absolute value of a regular operator acting on a noncommutative  $L^p$ -space. We equally prove that two classical operator norms, the regular norm and the decomposable norm are identical. We also describe precisely the regular norm of several classes of regular multipliers. This includes Schur multipliers and Fourier multipliers on some unimodular locally compact groups which can be approximated by discrete groups in various senses. A main ingredient is to show the existence of a bounded projection from the space of completely bounded  $L^p$  operators onto the subspace of Schur or Fourier multipliers, preserving complete positivity. On the other hand, we show the existence of bounded Fourier multipliers which cannot be approximated by regular operators, on large classes of locally compact groups, including all infinite abelian locally compact groups. We finish by introducing a general procedure in order to prove positive results on selfadjoint contractively decomposable Fourier multipliers, beyond the amenable case.

**Résumé (Projections, multiplicateurs et applications décomposables sur des  $L^p$ -espaces non commutatifs)**

On introduit un analogue non commutatif de la valeur absolue d'un opérateur régulier agissant sur un espace  $L^p$  non commutatif. Nous prouvons également que deux normes classiques d'opérateurs, la norme régulière et la norme décomposable sont identiques. On décrit aussi précisément la norme régulière de plusieurs classes de multiplicateurs réguliers. Cela inclut les multiplicateurs de Schur et les multiplicateurs de Fourier sur certains groupes localement compacts unimodulaires qui peuvent être approximés par des groupes discrets dans des sens variés. Le principal ingrédient est l'existence d'une projection bornée de l'espace des opérateurs complètement bornés sur l'espace des multiplicateurs de Schur ou de Fourier, préservant la positivité complète. Par ailleurs, on montre l'existence de multiplicateurs de Fourier bornés qui ne peuvent être approximés par des opérateurs réguliers, sur de larges classes de groupes

localement compacts, incluant tous les groupes localement compacts abéliens infinis. On termine en introduisant une procédure générale pour prouver des résultats positifs sur les multiplicateurs de Fourier contractivement décomposables autoadjoints, au-delà du cas moyennable.



# CONTENTS

<b>1. Introduction</b> .....	1
<b>2. Preliminaries</b> .....	9
2.1. Noncommutative $L^p$ -spaces and operator spaces .....	9
2.2. Matrix ordered operator spaces .....	12
2.3. Relations between matricial orderings and norms .....	16
2.4. Positive and completely positive maps on noncommutative $L^p$ -spaces ...	17
2.5. Completely positive maps on commutative $L^p$ -spaces .....	19
2.6. Markov maps and selfadjoint maps .....	20
<b>3. Decomposable maps and regular maps</b> .....	23
3.1. Preliminary results .....	23
3.2. On the infimum of the decomposable norm .....	27
3.3. The Banach space of decomposable operators .....	28
3.4. Reduction to the adjoint preserving case .....	32
3.5. Decomposable vs regular on Schatten spaces .....	36
3.6. Decomposable vs regular on approximately finite-dimensional algebras ..	39
3.7. Modulus of regular operators vs $2 \times 2$ matrix of decomposable operators .	46
3.8. Decomposable vs completely bounded .....	50
<b>4. Decomposable Schur multipliers and Fourier multipliers on discrete groups</b> ....	59
4.1. Twisted von Neumann algebras .....	59
4.2. Complementation for Schur multipliers and Fourier multipliers on discrete groups .....	62
4.3. Description of the decomposable norm of multipliers .....	66
<b>5. Approximation by discrete groups</b> .....	71
5.1. Preliminaries .....	71
5.2. Different notions of groups approximable by discrete groups .....	73
5.3. The case of second countable compactly generated locally compact groups	78
<b>6. Decomposable Fourier multipliers on non-discrete locally compact groups</b> .....	81
6.1. Generalities on Fourier multipliers on unimodular groups .....	81
6.2. The completely bounded homomorphism theorem for Fourier multipliers	92
6.3. Extension of Fourier multipliers .....	95

6.4. Groups approximable by lattice subgroups .....	96
6.5. Examples of computations of the density .....	108
6.6. Pro-discrete groups .....	119
6.7. Amenable groups and convolutors .....	125
6.8. Description of the decomposable norm of multipliers .....	127
<b>7. Strongly and CB-strongly non decomposable operators .....</b>	<b>133</b>
7.1. Definitions .....	133
7.2. Strongly non regular completely bounded Fourier multipliers on abelian groups .....	134
7.3. Strongly non regular completely bounded convolutors on non-abelian groups .....	147
7.4. CB-strongly non decomposable Schur multipliers .....	148
7.5. CB-strongly non decomposable Fourier multipliers .....	150
7.6. CB-strongly non decomposable operators on approximately finite-dimen. algebras .....	155
<b>8. Property <math>(\mathcal{P})</math> and decomposable Fourier multipliers .....</b>	<b>161</b>
8.1. A characterization of selfadjoint contractively decomposable multipliers ..	161
8.2. Factorizability of some matrix block multipliers .....	164
8.3. Application to the noncommutative Matsaev inequality .....	170
<b>Bibliography .....</b>	<b>173</b>