

## LES THÉORÈMES PROJECTIFS DE STURM ET LEUR CIRCULATION

Sylvain Demanie

---

Résumé. — Le mathématicien franco-suisse Charles-François Sturm est l'auteur d'un théorème peu connu en géométrie projective constituant le sujet principal d'un mémoire consacré aux sections coniques et publié en deux parties en 1826 dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées* de Gergonne. Sturm a découvert ce théorème lors de son premier séjour à Paris en tant que précepteur de la famille de Broglie en 1824. Au début du XIX<sup>e</sup> siècle, une communauté de géomètres français développa le projet d'organiser tout le corpus des propositions géométriques (y compris des théorèmes célèbres comme celui de Pascal) à partir de principes généraux. Les travaux de Sturm firent partie intégrante de ce projet et furent publiés à une époque où des débats sur des questions de rigueur et de bonne pratique de la géométrie animaient la communauté des mathématiciens : comment interpréter le concept de dualité ? Comment le représenter ? Quelle crédibilité donner au controversé principe de continuité énoncé par Poncelet ? De plus, le nouveau théorème découvert par Sturm s'inscrit dans un contexte de compétition et de querelles de priorité avec d'autres jeunes mathématiciens publiant également dans la revue de Gergonne, comme Plücker ou Bobillier. L'étude de la circulation de ce théorème de Sturm peut être étudiée dans la littérature

---

Texte reçu le 20 novembre 2021, accepté le 10 janvier 2022, révisé le 16 octobre 2022, version finale reçue le 17 novembre 2022.

Sylvain Demanie, Archives Henri Poincaré – Philosophie et Recherches sur les Sciences et les Technologies, UMR 7117 CNRS – Université de Lorraine – Université de Strasbourg, Site de Nancy : 91 avenue de la Libération – BP 454 F-54001 Nancy Cedex, France.

Courrier électronique : [sylvain.demanie@univ-lorraine.fr](mailto:sylvain.demanie@univ-lorraine.fr)

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 01A70, 51–03.

Mots clés : Géométrie projective, principe de continuité, dualité, circulation mathématique.

Key words and phrases. — Projective geometry, principle of continuity, duality, mathematical circulation.

scientifique nous permet de voir comment se sont construits les savoirs et les pratiques dans le domaine particulier de la géométrie projective.

Abstract (Sturm's projective theorems and their circulation)

The French-Swiss mathematician Charles-François Sturm was the discoverer of a little known theorem in projective geometry which was the main topic of a memoir dedicated to conic sections and published in two parts in 1826 in Gergonne's journal *Annales de mathématiques pures et appliquées*. Sturm discovered this theorem during his first stay in Paris as tutor to the de Broglie family in 1824. At the beginning of the 19th century, a community of French mathematicians had developed the project of organising the whole corpus of geometrical propositions (including famous theorems such as Pascal's) from general principles. Sturm's original work constituted a part of this project and appeared at a time when debates on questions of rigor and good practice in geometry had animated the community of mathematicians : how to interpret the concept of duality ? How to represent it ? What credence should be given to the controversial principle of continuity enunciated by Poncelet ? Furthermore, the new theorem discovered by Sturm appeared in a context of competition and priority debates with other young mathematicians also publishing in Gergonne's journal, such as Plücker or Bobillier. The study of the circulation of Sturm's theorem, which is little studied in the scientific literature, shows how knowledge and practices were formed in the particular field of projective geometry in France.

## 1. INTRODUCTION

Le mathématicien genevois Charles-François Sturm (1803–1855) est l'auteur d'un théorème de géométrie projective dont l'énoncé porte sur trois coniques – qu'on appelait également « lignes du second ordre » – ayant quatre points communs<sup>1</sup>. Énoncé en 1824 dans une lettre à son ami le futur physicien Jean-Daniel Colladon (1802–1893), le théorème et sa démonstration sont publiés pour la première fois en décembre 1826 dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées* (1810–1831)<sup>2</sup>, journal dirigé par le mathématicien Joseph-Diez Gergonne (1771–1859). Ce nouveau résultat, découvert alors que Sturm était tout juste âgé de 21 ans,

<sup>1</sup> Nous avons rangé le théorème dont il s'agit ici dans le domaine de la géométrie projective – même s'il n'a pas pu être classé ainsi à l'époque de sa publication et tout en reconnaissant qu'il est possible de regrouper sous cette étiquette des pratiques et des concepts différents – car il fait appel à des objets d'étude et à des notions considérées actuellement comme propres à la géométrie projective. Une délimitation rigoureuse du champ théorique de la géométrie projective s'effectuera complètement grâce à l'entreprise d'axiomatisation des théories géométriques conduite durant la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle [Nabonnand 2006, 3–4].

<sup>2</sup> Que nous appellerons pour la suite *Annales de Gergonne* ou simplement *Annales*.

fait son apparition au cours d'une période où des débats portant sur des questions de rigueur et de bonne pratique des mathématiques animent la communauté des géomètres constituée au début du XIX<sup>e</sup> siècle<sup>3</sup>. L'étude de la circulation de ce théorème dans la correspondance de différents acteurs scientifiques, dans les journaux savants et dans différents ouvrages consacrés à la géométrie permet de montrer, à travers le cas particulier de la géométrie projective, comment se constitue un ensemble de connaissances et de pratiques géométriques. Elle met aussi en lumière un court passage de l'itinéraire d'un jeune homme suisse qui, arrivé à Paris, semble déterminé à entamer une carrière de mathématicien.

La seule et unique contribution de Sturm à la géométrie projective a cependant été très peu étudiée. Pierre Speziali évoque dans un court paragraphe comment Sturm serait parvenu à « généraliser quelques résultats » [Speziali 1964, 15] en apportant deux nouveaux théorèmes à la théorie des sections coniques. Pour lui, le premier de ces théorèmes concernerait les « coniques doublement tangentes » tandis que le second décrirait « le lieu géométrique des centres de toutes les surfaces du second ordre tangentes à huit plans donnés de position » [Speziali 1964, 15]. Mais les théorèmes énoncés par Speziali ne semblent pas correspondre à ceux qui ont été donnés dans le mémoire de Sturm publié dans les *Annales*. Gino Loria a, quant à lui, consacré une partie de son travail biographique sur Sturm aux recherches géométriques menées par celui-ci [Loria 1938, 251–257]. Le théorème de Sturm sur les trois coniques y est correctement cité mais Loria n'apporte pas davantage de développements. Plus récemment, Jean-Claude Pont et Isaac Benguigui ont évoqué brièvement au sein d'un ouvrage collectif les découvertes de Sturm dans le champ de la géométrie projective [Pont & Benguigui 2009]. Cependant, l'attention des auteurs a davantage été focalisée sur les travaux plus connus du mathématicien suisse comme son théorème portant sur le nombre de racines réelles d'une équation numérique ou ses contributions à l'étude des équations différentielles dans le cadre de la théorie de Sturm-Liouville.

Nous nous proposons de mettre sur le devant de la scène les travaux de Sturm dans le domaine de la géométrie projective, de les situer dans les débats de l'époque puis d'étudier leur réception et leur circulation dans

---

<sup>3</sup> Nous y incluons tous les acteurs ayant publié des travaux géométriques sous la forme de mémoires, d'ouvrages ou d'articles parus dans la presse mathématique. Même si dans cette communauté on regroupe des acteurs évoluant dans des milieux sociaux (professeurs de collèges, polytechniciens, étudiants, etc.) et dans des espaces géographiques (Paris, Nîmes, Metz, Genève, etc.) bien distincts, les journaux mathématiques comme les *Annales de Gergonne* ont constitué un moyen de communication et d'échanges mettant en relation tous ces différents acteurs.

la littérature scientifique. Nos deux sources principales sont les suivantes : la lettre de Sturm à Colladon signée à Paris le 26 avril 1824 – dans laquelle Sturm explique avoir découvert des résultats nouveaux à son ami d'enfance resté à Genève – et le mémoire original de Sturm publié en deux parties au cours de l'année 1826 (en mars puis en décembre) sous le titre « Mémoire sur les lignes du second ordre », inséré dans les tomes 16 et 17 des *Annales de Gergonne*. Chacune des parties constituée dans le mémoire est divisée en cinq grands paragraphes. La lettre de Sturm à Colladon est conservée à la Bibliothèque de Genève<sup>4</sup> et a été reproduite dans son intégralité par Colladon dans ses *Souvenirs et Mémoires* publiés en 1893 [Sturm 1893]. Dans cette lettre, Sturm mentionne effectivement les deux nouveaux théorèmes qu'il aurait découverts et qui ont été correctement rappelés par Speziali. Surtout, Sturm relate à Colladon son projet de publier prochainement un mémoire en plusieurs parties et dont la première prend pour point de départ un théorème fondamental portant sur trois coniques ayant quatre points en commun : c'est ce théorème que nous allons étudier.

Une troisième partie du mémoire de Sturm contenant des théorèmes supplémentaires et inédits devait être originellement publiée dans les *Annales*. Bien plus tard, après la mort de Sturm en 1855, Liouville qui était un ami proche de celui-ci, s'était engagé à faire publier l'intégralité du mémoire comme nous le rappelle Loria [Loria 1938, 257]. Cela n'a hélas pas été fait et la dernière partie du mémoire a longtemps été considérée comme perdue. Cependant, Erwin Neuenschwander fit savoir en 1989 que plusieurs manuscrits inédits de Sturm avaient été découverts dans les archives de Liouville à Bordeaux, dont trois carnets contenant l'intégralité du mémoire sur les lignes du second ordre. Neuenschwander nous apprend notamment que la dernière partie du mémoire devait être constituée de douze paragraphes au total [Neuenschwander 1989, 340]. Le contenu de ces manuscrits inédits n'a pas encore été rendu public mais plusieurs indices nous permettent de conjecturer le contenu de cette partie manquante comme nous le verrons. Aussi, même s'il n'a fait paraître que les deux premières parties du mémoire dans son journal, Gergonne a eu accès à la troisième partie non publiée<sup>5</sup>.

<sup>4</sup> Bibliothèque de Genève (BGE), Ms. fr. 3255, f. 219–222. Une copie de la lettre originale se trouve également dans le document dont la cote est Ms. fr. 3748, f. 239–242.

<sup>5</sup> Dans une note à un article de Bobillier publié en 1828 et intitulé « Démonstration nouvelle de quelques propriétés des lignes du second ordre », Gergonne évoque en effet le mémoire manuscrit de Sturm et explique à ses lecteurs que son étendue ne lui a pas permis de le publier en entier [Bobillier 1827–1828b, 364].

Notre objectif est de montrer que les travaux de Sturm publiés dans les *Annales* en 1826 ont contribué – certes modestement – à la construction du champ de la géométrie projective auquel nous les avons rattachés *a posteriori* grâce aux outils que le jeune mathématicien genevois a développés. Les théorèmes de Sturm ont aussi été les témoins d’une époque au cours de laquelle ont émergé des discussions parfois très vives dans la presse mathématique centrées sur des questions de méthodes pouvant considérablement varier suivant les géomètres. Pour soutenir notre thèse, des extraits de journaux, des articles et des ouvrages consacrés à l’histoire de la géométrie nous permettront de voir comment le théorème des trois coniques de Sturm a pu circuler dans l’offre éditoriale mathématique et comment celui-ci a été relayé puis discuté par les différents acteurs historiques de la géométrie du XIX<sup>e</sup> siècle. Après avoir situé les travaux projectifs de Sturm dans la production mathématique au moment de leur publication, nous allons montrer en quoi ceux-ci se distinguent des recherches géométriques publiées par ses contemporains et comment ils alimentent les débats de l’époque, puis nous verrons comment les théorèmes de Sturm ont été reçus par la communauté des géomètres collaborant aux *Annales de Gergonne*.

## 2. UN NOUVEAU THÉORÈME DANS UNE DISCIPLINE EN PLEINE CONSTITUTION

Les travaux de Sturm dans le domaine de la géométrie projective, accomplis entre 1824 et 1826, apparaissent au cours d’une période marquée par la parution de nombreux ouvrages et mémoires écrits par des acteurs importants du champ de la géométrie projective.

Ainsi, en 1806, Lazare Carnot (1753–1823) fait publier son *Essai sur la théorie des transversales* dans lequel il expose une nouvelle théorie faisant jouer aux propriétés d’incidence<sup>6</sup> un rôle fondamental pour la géométrie [Nabonnand 2006, 27–28]. Auparavant, Carnot avait installé dans sa *Géométrie de position* son projet en partie déjà entamé dans *De la corrélation des*

---

<sup>6</sup> En géométrie, on appelle propriété d’incidence toute propriété décrivant des objets (les points, les droites, les courbes, les plans, les surfaces, etc.) en les mettant en relation au moyen des notions d’intersection, de parallélisme, d’alignement, etc. Les *transversales*, qui désignaient pour Carnot et ses contemporains des droites ou même des courbes quelconques traversant un système de droites ou de courbes, voire un système de plans ou de surfaces, avaient alors un rôle central dans la démonstration de propriétés d’incidence [Nabonnand 2006, 28].