

## LA THÉORIE DES COURBES ET SURFACES GÉOMÉTRIQUES CHEZ PONCELET

Jean-Daniel Voelke

---

**Résumé.** — Cet article étudie la manière dont Poncelet a utilisé la théorie des transversales de Carnot pour développer une théorie synthétique des courbes et surfaces géométriques. Un théorème établi par Carnot lui permet de redémontrer d'une nouvelle manière des théorèmes connus et de résoudre un grand nombre de problèmes de construction. Poncelet a donné un premier exposé de ses recherches dans un mémoire rédigé en 1816 mais publié seulement en 1864. Il les a reprises une décennie plus tard dans un mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1831 et publié dans le *Journal de Crelle* en 1832. Les recherches de Poncelet sur les courbes et surfaces géométriques constituent la suite de celles présentées dans le *Traité des propriétés projectives des figures* de 1822. Elles se caractérisent par une utilisation constante du principe de continuité et la volonté d'aboutir à des méthodes et solutions générales. En considérant des éléments à l'infini, Poncelet parvient à établir un lien entre différents théorèmes dus notamment à Newton et MacLaurin.

**Abstract** (Poncelet's theory of curves and geometric surfaces)

This paper studies the way in which Poncelet used Carnot's theory of transversals to develop a synthetic theory of geometric curves and surfaces. Thanks to a theorem established by Carnot, he could prove already known theorems in a new manner and solve a lot of construction problems. Poncelet's first presentation of his research was in a paper written in 1816 but which was only published in 1864. He presented it again in a paper in 1831 which was

---

Texte reçu le 6 janvier 2022, accepté le 15 novembre 2022 et mis en forme le 30 mars 2023.

J.-D. Voelke, Chemin de Primerose 47, CH-1007 Lausanne.

Courrier électronique : [jd.voelke@netplus.ch](mailto:jd.voelke@netplus.ch)

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 51-03.

Mots clefs : Jean-Victor Poncelet, Lazare Carnot, Colin MacLaurin, géométrie projective, théorie des transversales, courbes géométriques.

Key words and phrases. — Jean-Victor Poncelet, Lazare Carnot, Colin MacLaurin, projective geometry, theory of transversals, geometric curves.

given to the Académie des Sciences and published in the Journal of Crelle in 1832. Poncelet's research on geometric curves and surfaces is the continuation of that contained in the *Traité des propriétés projectives des figures* from 1822. It is characterized by a constant use of the continuity principle and the goal of arriving at general methods and solutions. By considering elements at infinity, Poncelet succeeds in establishing a link between different theorems due in particular to Newton and MacLaurin.

## 1. INTRODUCTION

Le *Traité des propriétés projectives des figures*<sup>1</sup> constitue l'ouvrage majeur de Jean-Victor Poncelet. Comme on le sait, l'auteur entend présenter de nouvelles méthodes permettant de développer la géométrie « ordinaire »<sup>2</sup> de la manière la plus générale possible et de mettre celle-ci au même niveau que la géométrie analytique<sup>3</sup>. Il accorde un rôle fondamental aux notions de projection et d'éléments à l'infini ainsi qu'au principe dit « de continuité »<sup>4</sup>. Les propriétés des figures invariantes par projection sont mises au premier plan et l'étude des coniques prend place dans un nouveau cadre conceptuel.

Après la parution du *Traité*, Poncelet publiera encore trois longs mémoires. Le premier est intitulé *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques* [Poncelet 1828] et fut écrit en 1823. Le deuxième est intitulé *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques* [Poncelet 1829] et fut écrit durant l'hiver 1823-1824. Ces travaux furent présentés à l'Académie des Sciences le 8 mars et le 12 avril 1824. Poncelet affirmera plus tard qu'ils « étaient destinés à faire immédiatement suite au texte du *Traité*, dont ils offraient

---

<sup>1</sup> [Poncelet 1822]. Dans la suite de cet article je parlerai simplement du *Traité*.

<sup>2</sup> [Poncelet 1822, p. v et p. xx]. Ce qualificatif est fréquemment utilisé par Poncelet et désigne la géométrie synthétique par opposition à la géométrie analytique.

<sup>3</sup> L'opposition entre la géométrie analytique et la géométrie ordinaire ainsi que la notion de généralité sont des thèmes fondamentaux chez Poncelet. Ils sont longuement développés dans l'introduction du *Traité* et résumés au début d'un mémoire ultérieur [Poncelet 1828, p. 213]. Ils apparaissent déjà dans un manuscrit écrit durant l'hiver 1818-1819 et consacré au principe de continuité [Poncelet 1864, 4<sup>e</sup> cahier] (cf. ci-dessous § 2.4). On pourra consulter sur ce sujet [Nabonnand 2006], [Nabonnand 2011] et [Nabonnand 2015]. Ces thèmes sont aussi fondamentaux chez Carnot et Chasles (cf. [Chemla 1998], [Nabonnand 2011] et [Chemla 2016]). En ce qui concerne l'origine des idées de Poncelet, on pourra consulter [Belhoste 1998] et [Friedelmeyer 2010]. Ce dernier étudie des aspects variés du *Traité*.

<sup>4</sup> Cf. § 2.4 ci-dessous.

l'application et le développement » [Poncelet 1866, p. V]. Le troisième mémoire est intitulé *Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques* [Poncelet 1832] et fut présenté à l'Académie des Sciences le 5 septembre 1831<sup>5</sup>. Les rapports concernant les deux premiers mémoires ne furent donnés que tardivement, en 1826 et 1828<sup>6</sup>. Ce retard semble être dû à l'hostilité de Cauchy et c'est grâce au soutien d'Alexander von Humboldt que les travaux de Poncelet purent être finalement publiés dans le tout nouveau *Journal de Crelle*<sup>7</sup>.

Soucieux d'établir sa priorité dans certains domaines [Poncelet 1862, p. xij] et [Poncelet 1866, p. VI, p. 235 et p. 311], Poncelet décida à la fin de sa vie de publier un ouvrage en deux tomes intitulé *Applications d'analyse et de géométrie, qui ont servi, en 1822, de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures*<sup>8</sup>. Cette publication sera suivie d'une réédition du *Traité* [Poncelet 1865] qui sera complété par un second tome [Poncelet 1866]. Celui-ci comprend en particulier les trois mémoires publiés dans le *Journal de Crelle* ainsi qu'un quatrième mémoire inédit intitulé *Propriétés communes aux systèmes de lignes et de surfaces géométriques d'ordre quelconque*<sup>9</sup>. Rédigé durant l'hiver 1830-31, il devait compléter le troisième. Ces deux derniers mémoires sont fondés sur des recherches effectuées par Poncelet pour l'essentiel avant 1825, date à laquelle il dut réduire considérablement son activité mathématique pour se consacrer à son enseignement de mécanique appliquée aux machines à l'École d'application de l'artillerie et du génie à Metz [Poncelet 1832, p. 24] et [Poncelet 1866, p. 235]. Ajouté à des problèmes de santé, ce changement professionnel retarda Poncelet dans

<sup>5</sup> Poncelet ne précise pas à quel moment ce mémoire fut rédigé.

<sup>6</sup> Ils figurent dans [Poncelet 1866, pp. 351-357 et pp. 359-363]. Poncelet ne mentionne pas de rapport concernant le troisième mémoire.

<sup>7</sup> Sur les rapports entre Cauchy et Poncelet, cf. [Poncelet 1864, pp. 553-554]. Sur les relations entre Humboldt et Poncelet, cf. [Poncelet 1866, pp. 406-407].

<sup>8</sup> [Poncelet 1862] et [Poncelet 1864]. Le premier tome est constitué pour l'essentiel du *Manuscrit de Saratoff* rédigé entre avril 1813 et juin 1814 par Poncelet durant sa captivité en Russie. C'est une première ébauche des problèmes et méthodes qui seront présentés dans le *Traité* (cf. [Belhoste 1998]). Le second tome est divisé en sept cahiers. Les cinq premiers sont constitués de manuscrits inédits rédigés entre 1815 et 1820. Le sixième comprend des articles publiés dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées* de Gergonne et repris ensuite partiellement dans le *Traité*. Le septième cahier contient de la correspondance.

<sup>9</sup> Il constitue la section IV de cet ouvrage. Les trois mémoires du *Journal de Crelle* constituent pour leur part les sections I, II et III. Cette réédition ne présente pratiquement pas de changements par rapport au texte original. Seuls certains titres et sous-titres sont modifiés. La section III comporte de plus des figures. Une section supplémentaire de l'ouvrage contient encore divers articles, rapports et notes.

la publication de ses recherches. Certains des résultats qu'il avait déjà obtenus furent trouvés par des voies différentes et publiés avant lui par d'autres mathématiciens [Poncelet 1832, p. 24].

Comme rappelé en préambule, le *Traité* est consacré à la présentation générale de nouvelles méthodes et à leur application à la géométrie « de la règle »<sup>10</sup> et à celle des coniques et surfaces du second ordre. Dès le début de ses recherches, Poncelet a cependant eu en tête de sortir de ce cadre restreint et d'exposer une théorie générale des courbes géométriques d'ordre quelconque. Il termine en effet l'introduction du *Traité* en écrivant :

Nous regrettons toutefois que le défaut d'espace ne nous permette pas d'y faire entrer nos recherches relatives aux propriétés projectives<sup>11</sup> des courbes géométriques des divers ordres, et nous oblige d'en renvoyer la publication à une époque plus reculée : cet ensemble, plus complet, aurait montré qu'il est peu de propriétés générales de l'étendue qu'on ne puisse ramener dans le domaine de la simple Géométrie, au moyen des ressources offertes, soit par la doctrine des projections, soit par la loi de continuité. [Poncelet 1822, p. xlvj]

Poncelet expose ici un programme ambitieux. Il s'agit de traiter pratiquement toutes les « propriétés de l'étendue » à l'aide des méthodes développées dans cet ouvrage et de rester ainsi dans le domaine de la « simple géométrie », c'est-à-dire d'éviter tout recours à l'algèbre. Dans l'introduction du mémoire *Analyse des transversales*, Poncelet affirme que selon le « plan » qu'il s'était fixé, la publication de ses recherches sur les courbes et surfaces d'ordre quelconque devait être précédée de celle du *Traité*. Il fallait d'abord exposer les « principes généraux de projection qui pouvaient m'être utiles pour établir ultérieurement la théorie géométrique des courbes et surfaces d'un ordre quelconque » [Poncelet 1832, p. 22]. Cette dernière tâche sera accomplie dans ce mémoire ainsi que dans le suivant *Propriétés communes aux systèmes de lignes et surfaces géométriques d'ordre quelconque*. Les deux premiers mémoires publiés dans le *Journal de Crelle*, sur les centres de moyennes harmoniques et la théorie des polaires réciproques, sont pour leur part destinés à présenter des principes nécessaires à l'étude des courbes et surfaces géométriques et

---

<sup>10</sup> Ce terme est fréquemment utilisé par les géomètres de l'époque. Cette géométrie s'occupe « des propriétés descriptives ou de situation des systèmes de lignes droites indéfinies » [Poncelet 1822, p. 76].

<sup>11</sup> De manière générale, les propriétés projectives d'une figure sont celles qui sont conservées par projection. Cette notion est introduite au début du *Traité* [Poncelet 1822, p. 5]. Nous verrons au § 2.3 plus précisément ce que Poncelet entend par propriétés projectives d'une courbe.

qui n'ont pas été abordés dans le *Traité*<sup>12</sup>. Dans l'introduction du premier, Poncelet écrit que « la théorie des courbes et des surfaces géométriques est étroitement liée à la doctrine du centre des moyennes harmoniques, qui est proprement une généralisation de celle du centre des moyennes distances » [Poncelet 1828, p. 218]. Comme cette « doctrine » n'est pas connue, il faut lui consacrer un premier mémoire. Il en va de même de la théorie des polaires réciproques, « indispensable pour établir certaines propositions qui doivent entrer dans la partie de ces recherches relatives aux courbes et aux surfaces géométriques en général » [Poncelet 1829, p. 1]. Ces différentes citations montrent que l'étude générale de ces courbes et surfaces devait constituer pour Poncelet l'aboutissement de toutes ses recherches. Comme nous le verrons, davantage que la « doctrine des projections », c'est un théorème établi par Carnot dans sa *Géométrie de position* [Carnot 1803] qui lui fournira l'outil essentiel pour achever son programme<sup>13</sup>. Conjointement avec le principe de continuité, il permettra à Poncelet d'étudier une courbe géométrique sans recourir à une équation algébrique. Contrairement à ce qu'il affirme, ses recherches dans ce domaine ne constituent donc pas directement la suite de celles développées dans le *Traité*. Si elles ont toutes deux comme objectif de fournir à la géométrie ordinaire des méthodes générales, les points de départ sont différents. Dans le cas des coniques, l'utilisation de projections permet de se ramener à un cercle. Cette méthode ne s'applique en revanche pas dans le cas d'une courbe géométrique d'ordre quelconque et il faut utiliser un autre principe. Relevons encore que si Poncelet parle, dans les extraits cités précédemment, de ses recherches sur les courbes et surfaces géométriques, l'essentiel est en fait consacré uniquement aux courbes. Seul le dernier mémoire *Propriétés communes aux systèmes de lignes et surfaces géométriques d'ordre quelconque* généralise à des surfaces certains résultats établis dans le plan.

À côté des deux mémoires de 1831 constituant les sections III et IV du second volume du *Traité*, Poncelet a laissé d'autres écrits consacrés aux courbes et surfaces géométriques. Le plus ancien témoigne des premières recherches effectuées dans ce domaine à partir de l'hiver 1815-1816, soit une année après son retour de Russie. Il s'agit d'un manuscrit intitulé *Méthode des transversales appliquée à la recherche et à la démonstration des propriétés*

<sup>12</sup> Le titre complet du premier de ces mémoires est *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques ; pour faire suite au traité des propriétés projectives des figures, et servir d'introduction à la Théorie générale des propriétés projectives des courbes et surfaces géométriques* [Poncelet 1828].

<sup>13</sup> L'énoncé est donné au § 2.2. ci-dessous.