

Astérisque

JEAN-MARIE TRÉPREAU

**Discrimination analytique des difféomorphismes
résonnants de $(\mathbb{C}, 0)$ et réflexion de Schwarz**

Astérisque, tome 284 (2003), p. 271-319

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2003__284__271_0>

© Société mathématique de France, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DISCRIMINATION ANALYTIQUE DES DIFFÉOMORPHISMES RÉSONNANTS DE $(\mathbb{C}, 0)$ ET RÉFLEXION DE SCHWARZ

par

Jean-Marie Trépreau

à Jean-Michel Bony,
pour son 60^e anniversaire

Résumé. — Nous montrons que des arguments géométriques très simples, basés sur la réflexion de Schwarz, permettent souvent de décider si deux paires d'arcs analytiques tangents en $0 \in \mathbb{C}$ sont analytiquement équivalentes au voisinage de 0. Nous en déduisons la construction de familles nombreuses de germes, formellement mais non analytiquement conjugués, de difféomorphismes analytiques résonnants de $(\mathbb{C}, 0)$.

Abstract (Resonant diffeomorphisms of $(\mathbb{C}, 0)$ and the Schwarz reflection). — We show that simple geometric arguments, based on the Schwarz reflection, allow in many cases to decide whether two pairs of tangent analytic arcs at $0 \in \mathbb{C}$ are conformally equivalent in a small neighborhood of 0. As an application, we exhibit big families of germs of analytic resonant diffeomorphisms of $(\mathbb{C}, 0)$, which are formally, but not analytically conjugate.

Introduction

Paires d'arcs analytiques tangents...— On s'intéresse à la classification analytique des paires (A, B) , où A et B sont deux germes, *tangents* en $0 \in \mathbb{C}$, d'arcs analytiques réguliers.

Deux telles paires, soit (A, B) et (C, D) , sont *équivalentes* s'il existe un germe en 0 de difféomorphisme holomorphe ϕ (on dira plutôt *un difféomorphisme analytique de $(\mathbb{C}, 0)$*), tel que :

$$\phi(A) = C, \quad \phi(B) = D.$$

Elles sont *formellement équivalentes* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un difféomorphisme analytique ϕ_n de $(\mathbb{C}, 0)$, tel que $\phi_n(A)$ et $\phi_n(B)$ soient respectivement tangents à C et à D , à des ordres $\geq n$.

Classification mathématique par sujets (2000). — 30 C 35, 30 D 05, 37 F 99.

Mots clefs. — Réflexion de Schwarz, transformations conformes, paires d'arcs analytiques.

Notons S_A la réflexion de Schwarz par rapport à un arc analytique régulier A . À la paire (A, B) , on associe son *indicateur* :

$$f = S_A \circ S_B.$$

C'est un difféomorphisme analytique de $(\mathbb{C}, 0)$, tangent à l'identité. Il est évident que les indicateurs de deux paires équivalentes sont (analytiquement) conjugués.

La classification formelle des paires a été faite par Kasner [15]. Il apparaît que les paires (A, B) dont l'indicateur appartient à une classe de conjugaison formelle donnée, s'il en existe, se répartissent en une ou deux classes d'équivalence formelle, selon que l'ordre de contact entre les deux arcs A et B est impair ou pair.

Nakai [19] a montré que les paires analytiques, dont l'indicateur appartient à une classe de conjugaison analytique donnée, se répartissent en une, deux, ou quatre classes d'équivalence analytique, selon les cas.

...et difféomorphismes tangents à l'identité. — Un difféomorphisme analytique de $(\mathbb{C}, 0)$, tangent à l'identité, possède deux invariants formels, l'ordre de tangence et un nombre complexe, son *résidu*. Dans [6], publié en 1939, Birkhoff montre que deux germes, formellement conjugués, ne sont pas (analytiquement) conjugués en général. Mieux, il construit un système complet d'invariants analytiques, en associant à tout difféomorphisme analytique f de $(\mathbb{C}, 0)$, tangent à l'identité, un couple $(g, h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{H}$ de fonctions, qu'il appelle les « fonctions de connexion » du germe f ; $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont des espaces parfaitement définis de fonctions holomorphes. Birkhoff montre que deux germes sont conjugués si et seulement s'ils ont les mêmes fonctions de connexion. Il pose aussi le problème de la synthèse : est-ce que tout $(g, h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{H}$ est le couple des fonctions de connexion d'un difféomorphisme analytique de $(\mathbb{C}, 0)$, tangent à l'identité ? Cet article a été oublié ⁽¹⁾.

Écalle [12], Malgrange [18] et Voronin [27] ont retrouvé les résultats de Birkhoff et résolu le problème de la synthèse. L'usage aujourd'hui est de parler des *invariants d'Écalle-Voronin*.

La classification analytique des germes de difféomorphismes tangents à l'identité est donc un problème résolu. Compte tenu de la relation entre paires d'arcs analytiques tangents et difféomorphismes, la classification analytique de ces paires trouve aussi sa solution.

Une construction géométrique d'invariants analytiques. — Notre point de vue, dans cet article, est différent. Rappelons d'abord que les invariants d'Écalle-Voronin ne se laissent pas facilement calculer !

Nous pensons démontrer qu'on gagne, pour étudier une paire d'arcs tangents, à ne pas se ramener à l'étude de son indicateur ; et même, que pour trouver des invariants

⁽¹⁾Jean-Pierre Ramis a retrouvé « par hasard » cet article fondamental en 1995. Je le remercie de m'avoir donné des détails sur cette découverte.

analytiques d'un difféomorphisme, *qui soit un indicateur de paire*, on a avantage à étudier la paire. Mentionnons que les indicateurs de paires sont rares parmi les difféomorphismes tangents à l'identité : il y a des obstructions formelles (un indicateur de paire a un résidu imaginaire pur), mais surtout des obstructions analytiques [19] qui s'écrivent en terme des invariants d'Écalte-Voronin.

Venons-en à la description de la méthode (la méthode de la réflexion) que nous proposons. Soit (A, B) une paire d'arcs tangents en $0 \in \mathbb{C}$, soit f son indicateur. Il s'agit de trouver des invariants analytiques de la paire (A, B) qui, éventuellement, permettent de montrer qu'elle n'est pas équivalente à une autre paire donnée.

Concernant le difféomorphisme f de $(\mathbb{C}, 0)$, tangent à l'identité, nous utilisons le fait bien connu qu'il existe un voisinage épointé de 0 qui est recouvert par la réunion des bassins d'attraction de 0, respectivement pour f et f^{-1} . Soit Δ un domaine tel que $0 \in \partial\Delta$, que f soit définie et injective sur Δ et que $f(\Delta) \subset \Delta$.

Pour tout $n \geq 0$, on définit les arcs analytiques A_n et B_n en prolongeant analytiquement, autant qu'il est possible dans $\Delta \cup \{0\}$, les germes d'arcs $f^{(n)}(A)$ ⁽²⁾ et $f^{(n)}(B)$. Alors, tout événement géométrique (une intersection, un point singulier...), dont la définition fait intervenir la famille des courbes $A_n, B_n, n \geq 0$, donne lieu à un événement du même type dans $f(\Delta)$, à la translation près des indices. Tout événement de ce type est donc *asymptotique*; il concerne en fait les germes de A et B en 0. Il peut permettre la discrimination analytique des paires.

Un exemple. — La Figure 1 devrait illustrer le caractère « évident » de la méthode de la réflexion. Chaque sous-figure représente une ellipse A , une tangente B à cette ellipse et le reflet B_1 de B par A . Dans (a), A est un cercle; la figure obtenue est bien classique. Dans (b)–(f), A n'est pas un cercle. Dans (b) et (f), le point de contact est un des sommets de A . Les trois paires (a), (b) et (f) sont formellement équivalentes. Les deux paires (c) et (e) le sont aussi. On montre facilement que, *si l'excentricité de l'ellipse A est assez petite (par exemple, voir Lemme 5.8, si elle est inférieure à 0,55)*, la figure de l'ellipse et de l'intersection de l'ellipse pleine avec B_1 est asymptotique.

La différence entre (a), (b) et (f) est spectaculaire; celle entre (c) et (e) aussi. À l'œil, on obtient le fait que les trois paires (a), (b) et (f) appartiennent à des classes analytiques distinctes.

Il y a mieux : l'angle au point double de B_1 dans (d)–(f), les angles aux intersections de B_1 avec A dans (b)–(f), sont aussi des invariants des germes (A, B) . On peut ainsi obtenir, *à l'œil et au compas*, la discrimination entre des paires de ce type, obtenues en faisant varier l'excentricité, choisie assez petite, et le point de contact de la tangente. La Figure 2 donne un exemple de cela.

⁽²⁾Dans cet article, $f^{(n)}$ désignera toujours l'itéré de f à l'ordre n ; par exemple $f^{(2)} = f \circ f \dots$. On notera souvent f^{-1} au lieu de $f^{(-1)}$

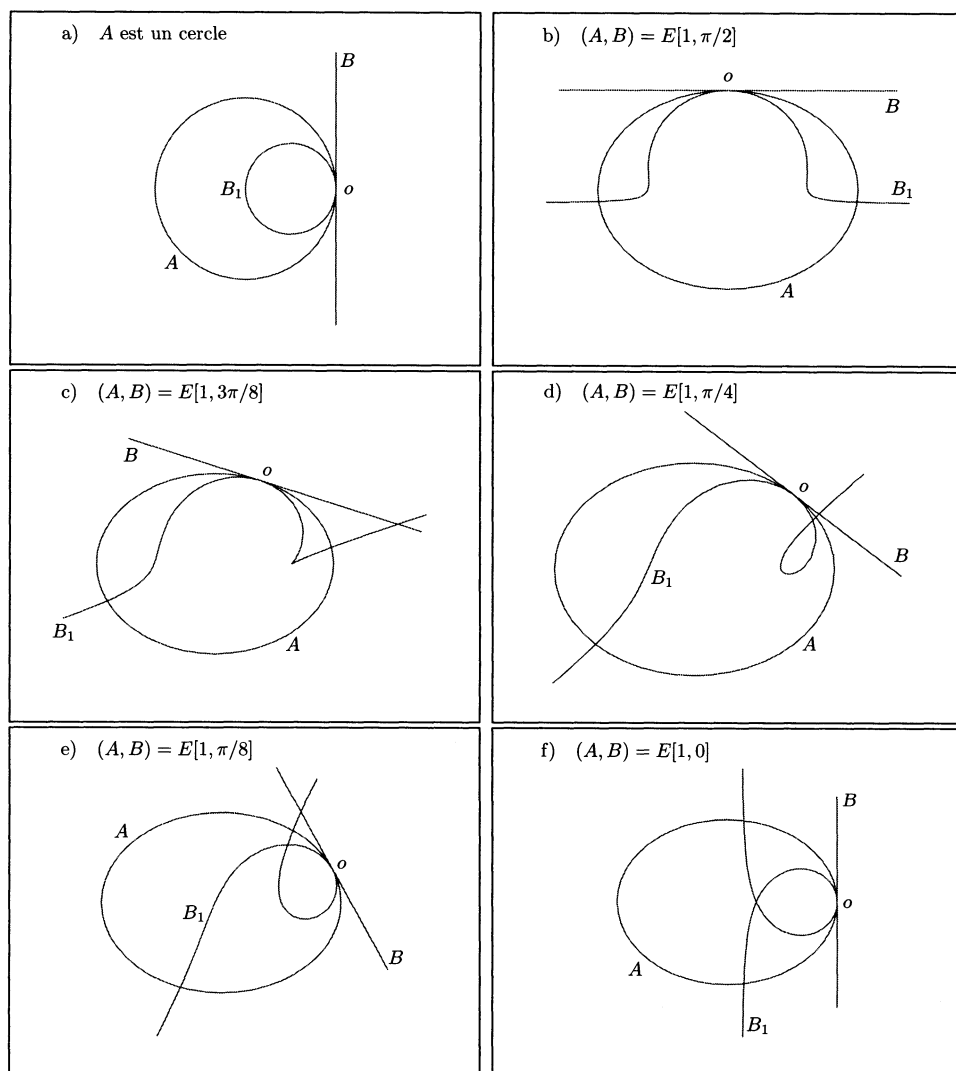


FIGURE 1. Le reflet d'une tangente par une ellipse

Contenu et plan de l'article. — Le cœur de l'article est constitué des Chapitres 3, 4 et 5, dans lesquels la méthode de la réflexion est appliquée. Ils peuvent être parcourus, pour la plus grande part, indépendamment du Chapitre 2. Pour simplifier, nous ne considérons dans ces chapitres que des paires d'arcs tangents à l'ordre 1, appelées *paires de type 2*, mais la méthode s'applique à des ordres de contact plus grands, avec quelques complications dues à la forme du bassin d'attraction du point