Séminaire BOURBAKI Novembre 2023
75-ième année, 2023–2024, n° 1211, p. 1 à 51
doi : 10.24033/ast.1228

PROGRÈS RÉCENTS SUR LES REPRÉSENTATIONS SUPERCUSPIDALES

par **Alexandre Afgoustidis**

1. Introduction

1.1. — Soient F un corps local et **G** un groupe algébrique réductif connexe défini sur F. C'est aux représentations complexes du groupe $G = \mathbf{G}(F)$ que l'on s'intéresse ici.

Lorsque F est archimédien, donc isomorphe à **R** ou **C**, le groupe G est un groupe de Lie avec un nombre fini de composantes connexes. L'étude de ses représentations est le grand œuvre d'Harish-Chandra, commencé immédiatement après 1945. Pour les questions qui nous occupent ci-dessous, l'essentiel était compris à la fin des années 1970 ; la classification de Langlands (1973) des représentations irréductibles « admissibles » a d'ailleurs tout juste cinquante ans.

Lorsque F n'est pas archimédien, le groupe G est totalement discontinu. L'étude de ses représentations « lisses » a débuté vers 1960 (Bruhat, 1961 ; Mautner, 1958). Elle a pris son essor une dizaine d'années plus tard, portée par son lien avec les formes automorphes, et se poursuit depuis sans relâche — avec, à l'horizon, les conjectures de Langlands et leur promesse arithmétique.

1.2. — L'analogie avec les groupes réels a joué un rôle central pour établir les fondements de la théorie non archimédienne, et pour la conception des conjectures de Langlands. Les bases de cette théorie s'expriment dans des termes très proches du cas réel, plus proches qu'on ne le devinerait d'après la structure seule des groupes — au point que cette analogie a pu paraître miraculeuse. Harish-Chandra empruntait à la géométrie algébrique l'expression « principe de Lefschetz » pour parler de ces rapprochements.

Mais les chemins ont divergé dès le début des années 1970. Dans le cas des groupes réels, la description des représentations irréductibles se ramenait, par inductions successives, à la recherche de représentations *de carré intégrable* de certains sous-groupes réductifs de G. Vers 1966, Harish-Chandra avait réussi à classifier ces représentations, en les paramétrant par des caractères de sous-groupes de Cartan compacts et en donnant une formule pour leurs caractères globaux (voir le § 3 et l'exposé de Duflo, 1977). Ce paramétrage par des caractères de tores était un ingrédient essentiel de la classification de Langlands. La situation s'est révélée très différente dans le cas non archimédien : la classification des représentations de carré intégrable reste hors d'atteinte à ce jour (sauf pour certains groupes classiques), et les informations explicites dont on dispose sur les caractères restent minces.

Cependant, à la fin des années 1950, Mautner (1964) avait découvert que si F n'est pas archimédien, il existe des représentations de $\mathbf{PGL}(2, \mathrm{F})$ dont les coefficients matriciels sont *à support compact*. Or, pour les représentations de groupes réductifs réels, aucun coefficient matriciel ne peut avoir cette propriété, sauf dans des cas triviaux. Il est vite apparu que les représentations *supercuspidales*, celles dont les coefficients matriciels sont à support compact modulo le centre, joueraient un rôle crucial dans l'organisation de la théorie non archimédienne : toute représentation lisse irréductible de G peut se plonger dans l'induite parabolique d'une représentation supercuspidale de sous-groupe de Levi de G (Godement et Jacquet, 1972 ; Jacquet, 1971). On pouvait donc adopter la stratégie suivante pour étudier les représentations de G dans le cas non archimédien :

(i) Décrire le dual supercuspidal de G, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de représentations supercuspidales irréductibles ;

(ii) En supposant connu le dual supercuspidal pour les sous-groupes de Levi de G, décrire plus précisément les autres représentations de G.

Les progrès sur ces deux problèmes ont été continus depuis un demi-siècle. C'est le premier des deux qui fait l'objet de cet exposé. Je n'aborderai pas le second problème, bien qu'il ait vu lui aussi d'importants progrès ces dernières années : pour quelques indications bibliographiques, voir le § 7. Pour le cas de $\mathbf{GL}(n)$, où la réduction au cas supercuspidal fonctionne sans obstacle, on pourra consulter l'exposé de Rodier (1981).

1.3. — Parmi les grands courants qui irriguent encore l'étude des représentations supercuspidales, certains prennent leur source dans la période mentionnée ci-dessus. Par exemple, il a semblé dès cette époque que le problème pouvait être plus abordable dans des cas « modérés » où la caractéristique résiduelle p de F est suffisamment grande relativement à $\mathbf{G}$ (la bonne condition à imposer à p fait partie de la question). Si $\mathbf{G}$ est le groupe $\mathbf{GL}(n)$ et si p ne divise pas n, Howe a décrit en 1977 une construction de représentations supercuspidales à partir de caractères de tores maximaux elliptiques de $\mathbf{G}$, qui s'accorde très bien avec le cas des groupes réels. Moy a montré en 1986 que cette construction donne tout le dual supercuspidal dans ce cas, et en a déduit une première proposition de correspondance de Langlands « modérée » pour $\mathbf{GL}(n)$.

Cet exposé, qui est entièrement consacré au cas modéré, décrit en quelque sorte l'actualité de ce courant d'idées lorsque $\mathbf{G}$ est un groupe réductif quelconque.

1.4. — Un autre courant, toujours porteur, mène vers des méthodes qui permettent d'aller au-delà du cas modéré — au prix d'une plus grande sophistication combinatoire. Ces méthodes portent généralement sur les groupes classiques et leurs formes intérieures. Pour la détermination du dual cuspidal de $\mathbf{GL}(n)$, c'est ce qu'ont fait Carayol (1984) pour n premier, puis Bushnell et Kutzko (1993) pour n quelconque ; voir l'exposé d'Henniart (1991). Les idées de Bushnell et Kutzko ont été généralisées avec beaucoup de succès pour les groupes classiques, en utilisant le cas de $\mathbf{GL}(n)$ comme camp de base : elles permettent de construire toutes les représentations supercuspidales des groupes classiques en caractéristique résiduelle $\neq 2$, et celles des formes intérieures de $\mathbf{GL}(n)$. Voir le § 7 pour quelques indications bibliographiques.

1.5. — Parallèlement, l'étude du cas modéré s'est poursuivie, avec en vue la terre promise des groupes réductifs généraux. Grâce à des idées introduites par Moy et Prasad en 1994, Adler (1998) puis Yu (2001) ont décrit une construction très générale de représentations supercuspidales, que j'expose dans le § 4. La filtration de Moy–Prasad et la construction de Yu ont permis d'avancer dans des voies jusqu'alors presque inaccessibles, notamment vers des renseignements explicites sur les formules de caractères (Adler et Spice, 2009 ; DeBacker et Spice, 2018 ; Spice, 2018, 2021).

Les progrès autour des représentations obtenues par la construction de Yu se sont beaucoup accélérés ces dernières années. Les avancées les plus spectaculaires concernent le cas où $\mathbf{G}$ se déploie sur une extension modérément ramifiée de F et où la caractéristique résiduelle p ne divise pas l'ordre $|\mathrm{W}|$ du groupe de Weyl de $\mathbf{G}$. Dans ce cas, que j'appellerai « bien modéré » dans ce texte, le tableau général des représentations supercuspidales est maintenant complet. Comme nous le verrons, on dispose aussi d'informations nouvelles qui rendent une partie du tableau beaucoup plus accessible.

1.6. — L'avancée la plus simple à énoncer est que dans le cas « bien modéré », la construction de Yu est exhaustive (Fintzen, 2021c). Grâce à des travaux de Hakim et Murnaghan (2008) complétés par Kaletha (2019), cela induit une véritable *classification* des représentations supercuspidales.

Ju-Lee Kim avait déjà montré, en 2007, que la construction de Yu fournit toutes les représentations supercuspidales irréductibles lorsque F est de caractéristique nulle et p est « très grand [(1)] ». Le résultat de Fintzen étend celui de Kim ; pour mesurer la portée de l'amélioration, mentionnons seulement que si $\mathbf{G}$ est semi-simple et p ne divise pas $|\mathrm{W}|$, alors $\mathbf{G}$ se déploie toujours sur une extension modérément ramifiée ; et que si le système de racines de $\mathbf{G}$ est de type $\mathbf{E_8}$, alors $|\mathrm{W}| = 696729600 = 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$, ce qui devrait montrer l'attrait de la nouvelle condition sur p.

[(1)] Il serait en principe possible d'expliciter une condition suffisante sur p pour le résultat de Kim, mais je n'ai connaissance d'aucun exemple où cela ait été fait.

1.7. — Comme on le verra, la construction de Yu se fait à partir de données en apparence sophistiquées. Ces données comprennent, entre autres, des représentations de sous-groupes de G qui proviennent essentiellement de représentations cuspidales de groupes réductifs finis. Voilà qui semble bien différent des paramétrages simples, par des caractères de tores, que donnaient Harish-Chandra (1966) pour la série discrète si $\mathrm{F} = \mathbf{R}$, et Howe (1977) pour le dual cuspidal de $\mathbf{GL}(n)$ si $p \nmid n$.

Dans le cas bien modéré, les travaux récents de Kaletha (2019, 2021b) éclairent d'un jour nouveau les représentations de Yu. Poursuivant une idée de Murnaghan (2011), ils établissent que « presque toute » représentation supercuspidale peut être construite à partir d'un caractère de tore maximal elliptique de G. Il s'agit de remarquer que la plupart des représentations cuspidales des groupes finis sont construites à partir de caractères de tores (théorie de Deligne–Lusztig), et de s'astreindre à utiliser ces dernières comme ingrédients « finis » dans la construction de Yu. Les représentations ainsi obtenues, que Kaletha nomme « régulières » et « non singulières », forment l'essentiel du dual supercuspidal. On les imagine volontiers plus maniables que les autres.

De fait, Kaletha remarque que pour ces représentations, les travaux sur les formules de caractère mentionnés ci-dessus (Adler, DeBacker, Spice...) peuvent être complétés jusqu'à obtenir une formule du caractère *entièrement explicite* (sur une partie adéquate de G), qui s'avère avoir la même structure que la formule d'Harish-Chandra pour les caractères des séries discrètes des groupes réels — et coïncide même avec cette formule si l'on en interprète correctement les ingrédients. Cette coïncidence est d'autant plus frappante qu'à ma connaissance, le principe de Lefschetz, qui était l'une des motivations de la construction de Howe (1977), avait presque entièrement disparu des travaux évoqués aux n$^{\text{os}}$ 1.4–1.6.

1.8. — L'application la plus spectaculaire des idées du n$^{\text{o}}$ 1.7 est probablement la construction d'une correspondance de Langlands, dans le cas « bien modéré », pour les paramètres de Langlands supercuspidaux. Sans entrer pour le moment dans les détails, la conjecture de Langlands locale suggère qu'on peut répartir « naturellement » les représentations lisses irréductibles de G en paquets finis indexés par certains homomorphismes continus $\varphi\colon \mathbf{WD}_{\mathrm{F}} \to {}^{\mathrm{L}}\mathrm{G}$, où $\mathbf{WD}_{\mathrm{F}}$ est un groupe de nature arithmétique attaché à F et où ${}^{\mathrm{L}}\mathrm{G}$ est le dual de Langlands de G. On peut imaginer que savoir répartir les représentations supercuspidales en paquets de Langlands soit un pas crucial dans cette voie. Pour le groupe $\mathbf{GL}(n)$, la construction de la correspondance de Langlands s'y ramène entièrement : voir les exposés de Rodier (1981) et de Carayol (2000).

Pour les groupes réductifs généraux, en revanche, on s'attend à ce que pour certains paramètres φ, le paquet $\Pi(\varphi)$ contienne une représentation supercuspidale mais ne soit pas formé entièrement de représentations supercuspidales. On peut se demander quels sont les paramètres φ donnant lieu à un paquet « entièrement supercuspidal », et comment construire les paquets attachés à ces paramètres. C'est à ces questions que Kaletha (2021b) répond complètement dans le cas bien modéré — par une méthode purement locale, directement inspirée de la construction de Langlands (1973).

Dans le cas des groupes réels, la correspondance construite par Langlands est tout entière basée sur le lien entre séries discrètes de G et caractères de tores maximaux : les tores maximaux dans $\mathbf{G}$ sont liés à ceux de (la composante neutre de) ${}^{L}G$, et Langlands combine ces deux liens pour passer d'un paramètre φ au paquet $\Pi(\varphi)$. La construction de Kaletha, exposée dans le § 6, suit le même chemin, en utilisant le lien entre représentations supercuspidales non singulières et caractères de tores maximaux elliptiques.

Cette construction explicite est bien éloignée des méthodes géométriques, et globales, qui ont mené aux retentissants travaux de Genestier et Lafforgue (2018) puis de Fargues et Scholze (2021). Espérons qu'il devienne bientôt possible de les comparer.

1.9. — La construction de Langlands, comme la première version de celle de Kaletha, a un désagrément : la route qui relie les paramètres de Langlands φ à des caractères de tores maximaux est, selon le mot de Carayol (1984), tortueuse. Dans le cas archimédien, Adams et Vogan ont montré en 1992 qu'on pouvait simplifier la construction de Langlands en y faisant intervenir certains revêtements doubles de tores maximaux de G ; cela éclaire aussi les formules de caractère. Récemment, Kaletha (2021a) a montré comment généraliser au cas non archimédien le revêtement d'Adams et Vogan. Il a esquissé les simplifications considérables que cela apporte (disparition des facteurs de transfert des formules de caractère, existence de L-plongements canoniques...).

1.10. — Voici le plan de ce texte. Les § 2 et 3 sont préparatoires ; j'y consacre quelques pages au cas réel pour donner un cas simple de l'usage de revêtements doubles, et pour que l'on puisse mieux voir le rôle du principe de Lefschetz dans les § 5–6. Ce n'est qu'au § 4 que j'entre dans le vif du sujet, avec une description de la construction de Yu et des résultats de classification récents dans le cas « bien modéré ». La suite de l'exposé porte sur les représentations régulières ou non singulières : le § 5 décrit ces représentations et leurs caractères, et le § 6 décrit la correspondance de Langlands supercuspidale. Dans ces deux paragraphes, j'ai choisi d'utiliser dès le départ le revêtement double de Kaletha pour décrire les constructions et les résultats. Cela permet d'assez nombreux raccourcis et clarifications, notamment dans la description de la correspondance de Langlands. Enfin, le § 7 donne des indications bibliographiques sur des progrès récents liés à notre sujet, qui vont au-delà du cas modéré ou des représentations supercuspidales.