Séminaire BOURBAKI Novembre 2023
75e année, 2023–2024, no 1212, p. 53 à 125
doi : 10.24033/ast.1229

PROLONGEMENT ANALYTIQUE DE FONCTIONS ζ ET DE FONCTIONS L

par **Pierre Colmez**

1. Introduction

1.1. La conjecture de Hasse–Weil

La fonction zêta de Riemann, définie par la formule $\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$ sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$, admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, holomorphe en dehors d'un pôle simple en $s = 1$, et une équation fonctionnelle [(1)]

$$\Gamma_{\mathbf{R}}(s)\zeta(s) = \Gamma_{\mathbf{R}}(1-s)\zeta(1-s)$$

Elle peut aussi se définir comme le produit eulérien $\prod_p (1-p^{-s})^{-1}$, où le produit porte sur les nombres premiers p ou, de manière équivalente, sur les idéaux maximaux de $\mathbf{Z}$.

Ce dernier point de vue se généralise pour donner naissance aux fonctions zêta de Hasse–Weil : si Λ est un anneau de type fini sur $\mathbf{Z}$ (i.e. Λ de la forme $\mathbf{Z}[X_1,\dots,X_n]/I$), on définit sa fonction zêta par la formule $\zeta_\Lambda(s) = \prod_{\mathfrak{m}}(1-|\Lambda/\mathfrak{m}|^{-s})^{-1}$ où le produit porte sur les idéaux maximaux de Λ et $|\Lambda/\mathfrak{m}|$ est le cardinal du corps fini $\Lambda/\mathfrak{m}$. Pour $\Lambda = \mathbf{Z}$, on retrouve la fonction zêta de Riemann.

Remarque 1.1. Si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de Λ, alors $\mathfrak{m}$ contient p pour un unique nombre premier p ; il s'ensuit que l'on a une factorisation $\zeta_\Lambda(s) = \prod_p \zeta_{\Lambda/p}(s)$ en produit de facteurs d'Euler.

On montre facilement que, si Λ est un quotient de $\mathbf{Z}[X_1,\dots,X_n]$, le produit converge pour $\mathrm{Re}(s) > n+1$ et définit une fonction holomorphe sur ce demi-plan.

Conjecture 1.2. (Hasse–Weil). *La fonction ζ_Λ possède un prolongement méromorphe à tout le plan complexe.*

(1) $\Gamma_{\mathbf{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, où Γ est la fonction Γ d'Euler ; on a $\Gamma_{\mathbf{R}}(s)\Gamma_{\mathbf{R}}(s+1) = \Gamma_{\mathbf{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$.

Voici ce qu'écrit Weil dans son commentaire sur [218] dans lequel il prouve le premier cas significatif de cette conjecture :

> Peu avant la guerre, si mes souvenirs sont exacts, G. de Rham me raconta qu'un de ses étudiants, Pierre Humbert, était allé à Göttingen avec l'intention d'y travailler sous la direction de Hasse, et que celui-ci lui avait proposé un problème sur lequel de Rham désirait mon avis. Une courbe elliptique C étant donnée sur le corps des rationnels, il s'agissait principalement, il me semble, d'étudier le produit infini des fonctions zêta des courbes C_p obtenues en réduisant C modulo p pour tout nombre premier pour lequel C_p est de genre 1 ; plus précisément, il fallait rechercher si ce produit possède un prolongement analytique et une équation fonctionnelle. [...]
>
> J'avoue avoir pensé que Hasse avait été trop optimiste. Je dis à de Rham, non seulement que le problème me semblait trop difficile pour un étudiant, mais même que je ne voyais aucune raison pour que le produit en question eût les propriétés que Hasse lui supposait. [...]
>
> Ce qui finalement me donna confiance dans cette idée, ce fut une fois de plus l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions ; j'observai (v. [217, p. 99]) que la conjecture de Hasse pour les courbes sur un corps de nombres correspond exactement à mes conjectures de 1949 pour les surfaces sur un corps fini, au sujet desquelles il ne me restait plus aucun doute.

Contrairement à ce que le cas $\Lambda = \mathbf{Z}$ pourrait laisser croire, cette conjecture est remarquablement difficile à prouver, même à Λ fixé. Un des problèmes est qu'il n'y a, en général, aucun moyen de décrire ce que doivent être les pôles du prolongement.

Remarque 1.3. Si $\mathscr{X} = \operatorname{Spec}\Lambda$, on a aussi $\zeta_\Lambda(s) = \prod_x (1 - |\kappa(x)|^{-s})^{-1}$, où x parcourt l'ensemble des points fermés de $\mathscr{X}$, et $\kappa(x)$ est le corps résiduel en x. Cette formule a un sens pour tout schéma $\mathscr{X}$ de type fini sur $\mathbf{Z}$, ce qui permet de définir la fonction zêta de Hasse–Weil $\zeta_{\mathscr{X}}$ d'un tel schéma. Comme on peut partitionner $\mathscr{X}$ en schémas affines $\operatorname{Spec}\Lambda_i$, on a $\zeta_{\mathscr{X}} = \prod_i \zeta_{\Lambda_i}$ et la conjecture de Hasse–Weil pour $\mathscr{X}$ est donc conséquence de celle pour les Λ_i.

1.1.1. *Le cas de la dimension* 0. — Il y a quand même un certain nombre de cas où cette conjecture est connue depuis belle lurette.

• $\Lambda = \mathbf{Z}[\sqrt{-1}]$ où $\zeta_\Lambda(s) = \zeta(s)L(\chi,s)$, où $L(\chi,s)$ est la fonction L de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 1}\chi(n)n^{-s} = \prod_p(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$, où $\chi\colon (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^* \to \{\pm 1\}$ est le caractère non trivial (i.e. $\chi(1) = 1$ et $\chi(-1) = -1$), dont le prolongement analytique à tout le plan complexe est élémentaire.

• Plus généralement, $\Lambda = \mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}_N]$ où ζ_Λ est le produit de ζ et de fonctions L de Dirichlet.

• Encore plus généralement, Λ anneau des entiers d'un corps de nombres F ; alors ζ_Λ est la fonction zêta de Dedekind ζ_F de F ; son prolongement méromorphe à tout le plan complexe a été établi par Hecke [131] ; cette fonction est holomorphe en dehors d'un pôle simple en $s = 1$.

1.1.2. *Le cas où $p = 0$ dans Λ.* — Comme $\zeta_{\mathscr{U}\cup\mathscr{V}} = \zeta_{\mathscr{U}}\zeta_{\mathscr{V}}\zeta_{\mathscr{U}\cap\mathscr{V}}^{-1}$, si $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ sont des fermés de Zariski de $\mathscr{X}$, on peut se ramener au cas où $\mathscr{X}$ est une variété algébrique irréductible définie sur $\mathbf{F}_q$. On a

$$-\log\zeta_{\mathscr{X}}(s) = \sum_x \sum_{k\geqslant 1} \tfrac{1}{k}|\kappa(x)|^{-ks} = \sum_{k\geqslant 1} \tfrac{1}{k}|\mathscr{X}(\mathbf{F}_{q^k})|\, q^{-ks}$$

(Si x est un point fermé de $\mathscr{X}$ et $|\kappa(x)| = q^k$, alors x correspond à une orbite de cardinal k de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_q/\mathbf{F}_q)$ agissant sur $\mathscr{X}(\mathbf{F}_{q^k})$.)

Une des célèbres conjectures de Weil sur le nombre de points des variétés sur les corps finis [216] affirme que $\zeta_{\mathscr{X}}$ est une fraction rationnelle en q^{-s} (et donc aussi en p^{-s}) ; ceci a été démontré par Dwork [86]. Ceci prouve la conjecture de Hasse–Weil en caractéristique p.

1.1.3. *Variétés de dimension $\geqslant 1$ sur un corps de nombres.* — Pour énoncer plus facilement les résultats suivants, disons que *deux séries de Dirichlet $F = 1 + a_2 2^{-s} + a_3 3^{-s} + \cdots$ et $G = 1 + b_2 2^{-s} + b_3 3^{-s} + \cdots$ sont équivalentes* (et notons $F \sim G$) s'il existe un ensemble fini S de nombres premiers et, pour $p \in S$, une fonction rationnelle R_p en p^{-s}, tels que $G = F \cdot \prod_{p\in S} R_p$.

Par exemple, le théorème de Dwork implique que $\zeta_\Lambda \sim 1$ si $p = 0$ dans Λ (c'est le cas, plus généralement, s'il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que $N = 0$ dans Λ). L'existence d'un prolongement méromorphe à tout le plan complexe pour une série de Dirichlet ne dépend que de sa classe modulo cette relation d'équivalence.

Remarque 1.4. Si X est une variété projective (ou propre) définie sur $\mathbf{Q}$ (ou sur un corps de nombres F), on peut en choisir un modèle $\mathscr{X}$ sur $\mathbf{Z}$ (ou sur l'anneau des entiers $\mathscr{O}_F$ de F) ; la classe de $\zeta_{\mathscr{X}}$ modulo $\sim$ ne dépend pas de $\mathscr{X}$ grâce à la rationalité des fonctions zêtas des variétés sur les corps finis. On note ζ_X cette classe ; on dit que X vérifie la conjecture de Hasse–Weil si c'est le cas pour une des $\zeta_{\mathscr{X}}$.

Les exemples ci-dessus concernaient la dimension 0 ou la caractéristique p. À partir de maintenant, nous allons nous intéresser uniquement à des variétés définies sur un corps de nombres F.

• Si X est une courbe de genre 0 définie sur F, alors $\zeta_X(s) \sim \zeta_F(s)\zeta_F(s-1)$, et la conjecture est une conséquence du résultat de Hecke mentionné ci-dessus.

• Weil [218] a traité le cas d'une courbe X d'équation $y^d = ax^e + b$, avec $a, b \in F^*$ et e, d entiers $\geqslant 2$; si F contient $\boldsymbol{\mu}_d$ et $\boldsymbol{\mu}_e$, cette courbe a beaucoup d'automorphismes, ce qui permet de factoriser la fonction $\zeta_X(s)$ sous la forme $\frac{\zeta_F(s)\zeta_F(s-1)}{L(\chi_1,s)\cdots L(\chi_{2g},s)}$ où g est le genre de X et les χ_i sont des caractères de Hecke de F pour lesquels le prolongement analytique de la fonction L est connu depuis les travaux de Hecke [132].

• Si $d = 2$ et $e = 3, 4$ dans l'exemple précédent, on tombe sur une courbe elliptique avec un automorphisme d'ordre 3 ou 4 ; cette courbe a donc de la multiplication complexe par $\mathbf{Z}[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}]$ ou $\mathbf{Z}[\sqrt{-1}]$. Deuring [80] a étendu le résultat à toutes les courbes elliptiques à multiplication complexe, et Shimura, Taniyama [200] aux variétés abéliennes à multiplication complexe de dimension quelconque.

• Eichler [87] et Shimura [199] ont prouvé la conjecture pour les quotients de courbes modulaires. Si X est un tel quotient, ils ont prouvé que $\zeta(X,s) \sim \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{L(f_1,s)\cdots L(f_g,s)}$ où g est le genre de X et $f_1,\ldots,f_g$ sont des formes modulaires de poids 2 (et il est élémentaire que $L(f,s)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbf{C}$ tout entier, si f est une forme modulaire).

Les résultats ci-dessus datent des années 1950. Les second et troisième exemples sont « de type $\mathbf{GL}_1$ »; le dernier a les formes modulaires intégrées dans la construction. Si on part d'une situation qui ne relève *a priori* d'aucun de ces deux cas, on n'a pendant longtemps eu que des confirmations numériques partielles pour des courbes elliptiques particulières, définies sur $\mathbf{Q}$; la méthode de Faltings–Serre ([196], lettre du 26/10/1984) a permis de transformer ces calculs en des preuves (2) mais, pour un résultat général, il a fallu attendre les années 1990 et les travaux de Wiles [222] menant à la preuve du théorème de Fermat.

Théorème 1.5. *Si X est une courbe de genre* 1 *définie sur* $\mathbf{Q}$, *alors X vérifie la conjecture de Hasse–Weil.*

Remarque 1.6. (i) Wiles [222] a prouvé le résultat pour les courbes semi-stables (incluant celles d'équation affine $y^2 = x(x-a)(x+b)$, avec $a,b \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$, premiers entre eux), le cas général a été démontré par Breuil, Conrad, Diamond, Taylor [33]. Ce que démontrent les auteurs ci-dessus est la conjecture de Taniyama–Weil selon laquelle $\zeta_X(s) \sim \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{L(f,s)}$ où f est une forme modulaire (i.e., X est modulaire).

(ii) On déduit des résultats de Taylor [206, 208] certains cas de la conjecture pour des courbes de genre 2 définies sur $\mathbf{Q}$ (celles dont la jacobienne a un anneau d'endomorphismes plus gros que $\mathbf{Z}$). Le nouveau point de vue introduit dans [206, 208] a été le point de départ d'une flopée de beaux résultats dont on trouvera les plus emblématiques au nº 1.3.4, mais qui sont moins précis que [33] car ils ne prouvent qu'une version potentielle de l'analogue de la conjecture de Taniyama–Weil (i.e., X est potentiellement modulaire).

Récemment, dans un petit article de 350 pages, Boxer, Calegari, Gee et Pilloni [28] ont démontré l'analogue en genre 2.

(2) Par exemple, cela a permis à Mestre [166] de prouver que la courbe elliptique E d'équation $Y^2+Y=X^3-7X+6$ vérifie la conjecture de Taniyama-Weil ; cette courbe est la courbe de conducteur minimal (son conducteur est 5077) avec $\mathrm{rg}(E(\mathbf{Q}))=3$. La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer prédit que $L(E,s)$ a un zéro d'ordre 3 en $s=1$ et Gross, Zagier [123] venaient juste de donner un moyen de le vérifier, ce qui permettait d'utiliser un résultat antérieur de Goldfeld [122] pour obtenir une minoration effective du nombre de classes des corps quadratiques imaginaires ; l'utilisation de la courbe E ci-dessus permettait par exemple de donner une liste *inconditionnelle* des corps quadratiques de nombre de classe 3 (cf. [175] pour les détails).

Théorème 1.7. (i) *Si X est une courbe de genre* 2 *définie sur* $\mathbf{Q}$ *ou, plus généralement, sur un corps totalement réel, alors X vérifie la conjecture de Hasse–Weil.*

(ii) *Si X est une variété abélienne de dimension* 2 *définie sur* $\mathbf{Q}$ *ou, plus généralement, sur un corps totalement réel, alors X vérifie la conjecture de Hasse–Weil.*

Remarque 1.8. (i) Ce que démontrent les auteurs est un résultat de modularité potentielle (cf. th. 1.25) pour les variétés abéliennes de dimension 2 sur un corps totalement réel (même si on ne s'intéresse qu'aux courbes définies sur $\mathbf{Q}$, on est forcé de traiter le cas d'un corps totalement réel général car la technique de modularité potentielle demande de faire une extension des scalaires à un corps totalement réel que l'on ne maîtrise pas). Le théorème s'en déduit par des méthodes qui sont standard depuis [206].

(ii) Il y a des raisons profondes pour lesquelles le cas des courbes de genre 2 est plus délicat que celui des courbes de genre 1 (cf. n° 1.3.5) ; ces mêmes raisons font que plus le genre augmente et plus le résultat est délicat à prouver (au moins avec les techniques ayant permis de prouver le cas des courbes de genres 1 et 2), et il semble que la preuve de la conjecture de Hasse–Weil pour les courbes de genre $\geqslant 3$ va demander des idées radicalement nouvelles.

Le résultat de modularité potentielle ci-dessus n'est pas la seule avancée importante de ces dernières années sur ce genre de questions (citons par exemple [2, 35, 27, 45, 171, 172, 173]), et nous allons essayer de faire un tour d'horizon de ces avancées.

Dans le reste de l'introduction, on commence (§ 1.2.1) par factoriser les fonctions zêta de Hasse–Weil en termes de fonctions L (motiviques) et on énonce les conjectures concernant le comportement de ces fonctions L (conj. 1.10 et 1.18). Le § 1.3 (principalement, les n^os 1.3.4, 1.3.5 et 1.3.6) est consacré aux énoncés des théorèmes de modularité mentionnés ci-dessus, et le § 1.4 donne des applications arithmétiques des théorèmes de modularité (conjectures de Sato–Tate et de Ramanujan, et équation de Fermat).

Le corps du texte est consacré à la présentation d'un certain nombre d'outils utilisés dans les preuves des théorèmes de modularité : le chap. 2 tourne autour des questions liées aux représentations galoisiennes d'un corps de nombres, le chap. 3 survole une partie de la théorie des représentations automorphes, et le chap. 4 est consacré aux représentations galoisiennes d'un corps local.

Ce texte reste à un niveau assez superficiel (nous nous sommes contenté d'énoncer les résultats et de présenter les outils intervenant dans les preuves — pas tous... — mais nous ne disons rien des preuves elles-mêmes), et nous conseillons au lecteur désireux d'approfondir le sujet de lire les articles de survol récents écrits par des gens plus compétents (par exemple ceux de Calegari [41], de (3) Gee [119] et de Caraiani, Shin [47] ou ceux, plus anciens, de Carayol [48] et Taylor [207]).

Remerciements. — Je remercie Sophie Morel, Frank Calegari et Michael Harris pour leurs commentaires sur la version parue dans la brochure du séminaire.

(3) Ou encore [92, § 3.1] pour une un point de vue sur le patching à la Taylor-Wiles-Kisin..., malheureusement absent de ce texte.