Séminaire BOURBAKI Novembre 2023
75e année, 2023–2024, no 1214, p. 203 à 259
doi : 10.24033/ast.1231

COHOMOLOGIE DES ESPACES DE MODULES DE COURBES *VIA* LA GÉOMÉTRIE TROPICALE ET LES COMPLEXES DE GRAPHES
[*d'après* M. Chan, S. Galatius et S. Payne]

par **Jérôme Poineau**

Introduction

Ce texte est consacré à l'espace de modules M_g des surfaces de Riemann compactes connexes de genre g. Bien qu'il s'agisse d'un objet central en géométrie, connu et étudié depuis longtemps, on ne dispose que d'informations fort lacunaires sur sa cohomologie singulière. Des estimations asymptotiques de caractéristique d'Euler, réalisées par Harer et Zagier dans les années quatre-vingt, permettent néanmoins d'affimer qu'il s'agit d'un monde très vaste, où apparaissent de nombreux groupes de grande dimension.

Pour cette étude, les méthodes issues de la géométrie classique font long feu. Si elles permettent de construire naturellement des classes de cohomologie à partir de classes de Chern de fibrés sur la courbe universelle au-dessus de M_g, on ne voit ainsi apparaître qu'une partie fort restreinte du paysage, limitée aussi bien en nature — classes de degré pair —, qu'en quantité — dimension de l'espace engendré bien inférieure à l'asymptotique observée par Harer et Zagier.

C'est dans ce contexte que Melody Chan, Søren Galatius et Sam Payne démontrent le résultat suivant : la dimension du groupe de cohomologie $H^{4g-6}(M_g, \mathbf{Q})$ croît exponentiellement en g. Au-delà du caractère remarquable du résultat lui-même, leur texte interpelle par l'originalité des méthodes mises en œuvre. Elle font en effet intervenir d'autres espaces de modules, classifiant différentes structures, sortes de version épurées des surfaces de Riemann.

Nous nous proposons ici de raconter les grandes lignes de la preuve de Chan, Galatius et Payne (2021). Nous y trouvons l'occasion d'une promenade à la frontière de l'espace de modules des surfaces de Riemann, où apparaissent graphes, courbes tropicales et courbes de Berkovich.

Pour le lecteur désireux d'approfondir le sujet, signalons l'existence d'un texte de survol par Chan (2021), mettant l'accent sur la notion d'espaces de modules, ainsi que de notes de cours par Chan (2017) et Payne (2020).

La section 1 contient des généralités sur l'espace de modules M_g. Sans rentrer dans le détail de sa construction, nous rappelons quelques résultats connus, comme l'asymptotique de Harer et Zagier et sa comparaison avec le nombre de classes d'origine géométrique. Nous évoquons ensuite rapidement la notion de structure de Hodge, fondamentale dans la suite. Considérons une variété X de dimension d et plongeons-la dans une variété propre $\overline{X}$ (une compactification) de façon que le bord $\partial X := \overline{X} \setminus X$ soit un diviseur à croisements normaux de $\overline{X}$. Alors le gradué de poids maximal de X (au sens de la structure de Hodge mixte) prend place dans un isomorphisme

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{W}}_{2d} H^{2d-k}(X, \mathbf{Q}) \simeq H^{\mathrm{sing}}_{k-1}(|\Delta(\partial X)|, \mathbf{Q}),$$

où $|\Delta(\partial X)|$ désigne le complexe dual de la variété ∂X. Ainsi rencontrons-nous la première construction combinatoire de ce texte.

Dans le reste de la section 1, nous spécialisons ces résultats dans le cas de la variété M_g qui nous intéresse. Nous introduisons donc la notion de courbe stable, puis l'espace de modules des courbes stables de genre g, autrement dit, la compactification de Deligne–Mumford $\overline{M}_g$ de M_g.

Dans la section 2, nous présentons deux variantes de l'espace de module M_g des courbes lisses. Dans un cas comme dans l'autre, la notion centrale est celle de graphe, de nature purement combinatoire, convenablement raffinée. La première variante, l'outre-espace CV_g, a été introduit par Culler et Vogtmann dans les années quatre-vingt afin d'étudier les automorphismes du groupe libre F_g, et nous nous contentons de l'évoquer rapidement. Nous exposons plus longuement la seconde variante, l'espace de modules Δ_g classifiant les courbes tropicales normalisées de genre g, autrement dit, les graphes métriques compacts de longueur totale 1 et de genre g dont les sommets sont munis de poids entiers. L'espace Δ_g possède une structure très concrète de Δ-complexe symétrique, décrite en termes de contractions d'arêtes sur des graphes. Nous montrons qu'elle s'identifie au complexe dual du bord de la compactification de Deligne–Mumford de M_g mentionnée précédemment :

$$\Delta_g \simeq |\Delta_{\mathrm{sym}}(\partial M_g)|,$$

où $\partial M_g := \overline{M}_g \setminus M_g$.

La section 3 présente une digression autour des espaces de Berkovich et de leur application à l'étude du bord des variétés complexes. Nous proposons quelques rappels sur ces espaces et mettons en avant leur aspect polytopal et combinatoire. Nous nous attardons sur le cas de la dimension 1, dans lequel ces propriétés sont particulièrement visibles : une courbe de Berkovich peut être décrite comme une courbe tropicale où sont branchés des arbres réels.

Le reste de la section 3 met en avant un autre aspect combinatoire des espaces de Berkovich, d'après un travail d'Amaury Thuillier. Partant d'une variété torique, il observe que l'on peut réaliser son éventail dans l'espace de Berkovich associé, et de même pour les plongements toroïdaux. Étant donnée une variété complexe X, il est alors possible de lui associer canoniquement un espace de Berkovich $\mathfrak{X}_\eta$, sorte de bord non archimédien intrinsèque, dont le type d'homotopie est le même que celui du complexe dual d'un bord à croisements normaux de X.

Dans la section 4, nous revenons au calcul de la cohomologie singulière de M_g, *via* celle de Δ_g. La structure de Δ-complexe de Δ_g permet d'écrire un complexe explicite d'espaces vectoriels sur $\mathbf{Q}$ calculant ces groupes de cohomologie. En étudiant certains graphes d'un type particulier, on montre qu'un certain quotient, possédant la même cohomologie, s'identifie au complexe de graphes commutatif défini par Maxim Kontsevich. Ce dernier a fait l'objet de nombreuses études, et des travaux combinés de Francis Brown et Thomas Willwacher assurent que sa cohomologie contient une algèbre de Lie libre sur un ensemble dénombrable de générateurs, d'où découle la croissance exponentielle de la dimension désirée.

La section 5 regroupe, sans démonstration, plusieurs résultats du même type que le précédent, non annulation ou croissance exponentielle de groupes de cohomologie, dans différents cadres : espaces de modules de courbes marquées, de variétés abéliennes, etc.

Remerciements. — La majeure partie de ce texte a été rédigée au cours d'un séjour à Francfort. Je remercie l'université Goethe et ses membres pour les excellentes conditions d'accueil, ainsi que la Deutsche Forschungsgemeinschaft (TRR 326 Geometry and Arithmetic of Uniformized Structures, project number 444845124) pour son soutien financier. Je remercie tout particulièrement Yiu Man Wong pour de nombreuses discussions éclairantes. Merci également à Najib Idrissi pour ses explications sur les opérades et les complexes de graphes. Je remercie finalement Adrien Cortes, John Boxall, Gilbert Levitt et trois rapporteurs anonymes pour leurs commentaires sur ce texte.

1. Espaces de modules de courbes

Soit $g \geqslant 2$. Cette section est consacrée à l'espace de module M_g des courbes projectives lisses connexes de genre g sur $\mathbf{C}$ (autrement dit des surfaces de Riemann compactes et connexes de genre g). Cet espace constitue un vaste sujet d'étude, auquel il est difficile de rendre justice en quelques pages. Afin d'entrer directement dans le vif du sujet et d'aborder sans délai les questions cohomologiques qui nous intéressent, nous ne nous attarderons pas sur sa construction ou ses propriétés de base. Pour cela, nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage très complet d'Arbarello, Cornalba et Griffiths (2011).

Dans la suite de ce texte, nous noterons M_g l'espace de modules des courbes projectives lisses connexes de genre g sur $\mathbf{C}$. Il s'agit d'une variété quasi-projective de dimension $3g-3$. Deligne et Mumford (1969) en proposent une version champêtre, que nous noterons $\mathcal{M}_g$. Son espace de module grossier est M_g et, d'après Behrend (2004), pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on a un isomorphisme canonique

$$H^k(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q}) \simeq H^k(M_g, \mathbf{Q}).$$

Pour les questions qui nous intéressent, nous pouvons donc utiliser indifféremment l'un ou l'autre de ces espaces.

1.1. Espace de Teichmüller et groupe modulaire

L'étude directe de l'espace de modules M_g est difficile et s'effectue souvent à l'aide d'espaces auxiliaires. Nous présentons ici le plus célèbre d'entre eux, l'espace de Teichmüller, qui classifie des courbes analytiques munies de données supplémentaires.

Soit $g \geqslant 2$. Soit Σ une surface compacte connexe orientable de genre g. Pour toute surface de Riemann C compacte connexe, une *structure de Teichmüller* sur C est la donnée d'une classe d'isotopie d'homéomorphismes $f\colon \Sigma \to C$ qui préservent l'orientation. L'*espace de Teichmüller* $\mathcal{T}_g$ est l'ensemble des classes d'isomorphie de couples (C, f) comme ci-dessus, des couples (C, f) et (C', f') étant dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de surfaces de Riemann $\varphi\colon C \to C'$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dd, "\varphi"] \\ \Sigma \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \\ & C' \end{tikzcd}$$

commute. L'espace $\mathcal{T}_g$ possède une structure naturelle d'espace analytique complexe.

Le *groupe modulaire* Mod_g (mapping class group en anglais) est le groupe des classes d'isotopie d'homéomorphismes $f\colon \Sigma \longrightarrow \Sigma$ qui préservent l'orientation. Il agit naturellement sur l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_g$. On vérifie que l'action est propre, à stabilisateurs finis, et que le quotient s'identifie à l'espace de modules des courbes :

$$\mathcal{T}_g/\mathrm{Mod}_g \simeq M_g.$$

L'un des résultats fondamentaux sur l'espace de Teichmüller affirme qu'il est isomorphe à la boule unité de $\mathbf{C}^{3g-3}$. En particulier, il est contractile. On en déduit que, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on a un isomorphisme

$$H^k(M_g, \mathbf{Q}) \simeq H^k(\mathrm{Mod}_g, \mathbf{Q}),$$

où le membre de droite s'entend au sens de la cohmologie des groupes. Ajoutons que le groupe modulaire Mod_g est bien compris : on en connaît des générateurs (les twists de Dehn), des présentations par générateurs et relations, etc. Aussi les isomorphismes précédents fournissent-ils des moyens efficaces d'obtenir des informations sur la cohomologie de M_g.

Un premier exemple est le calcul de la dimension cohomologique virtuelle de Mod_g, égale à $4g-5$, d'après HARER (1986). Tous les groupes de cohomologie de M_g de degré strictement supérieur sont donc nuls, quels que soient les coefficients. Dans le cas particulier des coefficients rationnels, l'annulation persiste en degré égal au degré cohomologique (CHURCH, FARB et PUTMAN, 2012 ; MORITA, SAKASAI et SUZUKI, 2013). Résumons.

Théorème 1.1. *Pour tout $k \geqslant 4g-5$, on a*

$$H^k(M_g, \mathbf{Q}) = 0.$$

Un second exemple particulièrement intéressant pour les questions qui nous occupent figure dans l'article de HARER et ZAGIER (1986). En faisant agir Mod_g sur un complexe simplicial contractile explicite, construit à partir de classes de lacets dans Σ, les auteurs parviennent à calculer la caractéristique d'Euler de M_g.

Théorème 1.2. *Quand g tend vers l'infini, on a*

$$\chi(M_g) := \sum_{k\in\mathbf{N}} (-1)^k \, H^k(M_g, \mathbf{Q}) \sim \frac{\zeta(1-2g)}{2-2g},$$

où ζ désigne la fonction de Riemann.

Rappelons que $\zeta(1-2g) = -\frac{B_{2g}}{2g} \sim (-1)^g \frac{(2g-1)!}{2^{2g-1}\pi^{2g}}$, où B_{2g} désigne le $2g^{\text{ème}}$ nombre de Bernoulli. On en déduit que, lorsque g tend vers l'infini, la caractéristique $\chi(M_g)$ prend alternativement des valeurs positives et négatives et présente une croissance en valeur absolue de l'ordre de g^{2g}. En particulier, l'espace de modules M_g possède des groupes de cohomologie de grande dimension.

1.2. La partie géométrique de la cohomologie

L'espace de modules M_g est un espace de modules de courbes et l'on aimerait disposer d'une famille universelle de courbes sur cet espace. Ceci n'est possible qu'en passant à la version champêtre $\mathcal{M}_g$ de M_g. Il existe alors en effet un champ algébrique $\mathcal{C}_g$ et un morphisme $\pi\colon \mathcal{C}_g \to \mathcal{M}_g$ propre et lisse, de dimension relative 1.

En ayant cette courbe universelle $\mathcal{C}_g$ à disposition, il devient possible de recourir à des constructions géométriques classiques pour obtenir des classes de cohomologie de $\mathcal{M}_g$. MUMFORD (1983) définit ainsi certaines *classes κ* par

$$\kappa_i := \pi_*(c_1(\omega_g)^{i+1}) \in H^{2i}(\mathcal{M}_g, \mathbf{Q}),$$

où $\omega_g := \omega_{\mathcal{C}_g/\mathcal{M}_g}$ désigne le fibré dualisant relatif et $c_1(\omega_g)$ sa première classe de Chern. Remarquons que toutes les classes κ sont de degré pair.