

STABILITÉ DES TROUS NOIRS DE SCHWARZSCHILD ET DE KERR

par Cécile Huneau

1. Introduction

L'espace-temps en relativité générale est décrit par une variété \mathcal{M} ⁽¹⁾, équipée d'une métrique lorentzienne g , c'est-à-dire d'une forme quadratique de signature $(-1, 1, 1, 1)$, qui sépare les vecteurs de l'espace tangent en :

- ▷ vecteurs de genre espace, avec $g(X, X) > 0$,
- ▷ vecteurs de genre temps, avec $g(X, X) < 0$,
- ▷ vecteurs isotropes, avec $g(X, X) = 0$.

La métrique g encode les phénomènes de gravitation : les corps en chute libre y suivent les géodésiques. Les équations de la relativité générale, formulées par Einstein en 1915 s'écrivent

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Dans cette équation, $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci de la métrique g , R est sa courbure scalaire, et $T_{\mu\nu}$ le tenseur d'énergie-impulsion, dont la forme dépend du modèle de matière étudié. L'équation (1) est covariante. Écrite dans un système de coordonnées, elle correspond à un système d'équations sur les coefficients de la métrique. Dans le vide, c'est-à-dire pour $T_{\mu\nu} = 0$, on obtient en prenant la trace de (1) que la courbure scalaire s'annule, et que donc les équations d'Einstein dans le vide peuvent s'écrire simplement

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2)$$

En 1916, le physicien Schwarzschild a calculé la forme des solutions statiques et à symétrie sphérique des équations d'Einstein dans le vide, afin de décrire la gravitation créée par une étoile isolée. Ces solutions, paramétrées par m la masse de l'étoile,

⁽¹⁾Dans ce texte, \mathcal{M} sera toujours de dimension 4.

sont appelées solutions de Schwarzschild et s'écrivent dans les coordonnées (t, r, θ, ϕ) adaptées aux symétries de la solution

$$g_S = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2). \quad (3)$$

La métrique g_S permet de décrire la gravitation à l'extérieur d'une étoile de rayon $r_{\text{étoile}} > 2m$, la métrique à l'intérieur de l'étoile devant, elle, satisfaire les équations d'Einstein avec champ de matière. Dans le cas où $m = 0$, la solution obtenue est la métrique de Minkowski.

C'est dans les années 1960, avec les travaux de Kruzkal et Szekeres, qu'il a été compris que la dégénérescence de la métrique en $r = 2m$ correspond à une singularité de coordonnées : la métrique peut être prolongée au-delà et la région ainsi greffée est un trou noir, qui est une région de l'espace-temps où la gravitation est tellement forte que tous les corps, y compris les rayons lumineux, y sont piégés. Ce prolongement est détaillé dans la sous-section 1.1. La région $r > 2m$ correspond quant à elle à l'extérieur du trou noir.

La famille de solutions de Schwarzschild, indexée par le paramètre de masse m , est la seule famille de solutions à symétrie sphérique des équations d'Einstein dans le vide : par le théorème de Birkhoff, une solution à symétrie sphérique est forcément statique. Elles ne sont en revanche pas les seules solutions statiques : une famille à deux paramètres de solutions a été calculée par Kerr en 1962. Ces solutions statiques et à symétrie axiale décrivent les trous noirs en rotation.

1.1. La métrique de Schwarzschild

Pour comprendre le trou noir de Schwarzschild, nous allons faire quelques changements de coordonnées à partir de la formule (3) qui décrit la métrique pour $(t, r, \sigma) \in \mathbb{R} \times (2m, +\infty) \times \mathbb{S}^2$. On introduit la coordonnée r^* telle que

$$r^* = r + 2m \ln \left(\frac{r}{2m} - 1 \right),$$

ce qui implique

$$dr = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dr^*.$$

La région asymptotique $r \rightarrow 2m$ est alors envoyée sur $r^* \rightarrow -\infty$. La métrique de Schwarzschild dans ces nouvelles coordonnées s'écrit maintenant

$$g_S = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dt^2 - (dr^*)^2) + r^2 d\sigma^2,$$

où r est une fonction de r^* . Les coordonnées $u = t - r^*$ et $v = t + r^*$ sont des coordonnées isotropes pour la métrique :

$$g_S = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dudv + r^2 d\sigma^2. \quad (4)$$

Dans (4), r doit être vue comme une fonction de u et v . Quand r tend vers $2m$ à v fixé, u tend vers $+\infty$. Il faut donc encore faire un changement de coordonnées pour prolonger la métrique : on pose

$$U = -e^{-\frac{u}{4m}}, \quad V = e^{\frac{v}{4m}}.$$

La région $(r, t) \in]2m, +\infty[\times \mathbb{R}$ est en bijection avec $(U, V) \in]-\infty, 0[\times]0, +\infty[$. La métrique de Schwarzschild s'écrit dans ces nouvelles coordonnées

$$g_S = \frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{2m}} dUdV + r^2 d\sigma^2, \quad (5)$$

où r est une fonction de U et V définie en inversant l'expression

$$UV = - \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) e^{\frac{r}{2m}}.$$

La métrique (5) est donc bien définie pour tout $(U, V) \in \mathbb{R}^2$ tel que $r(U, V) > 0$. La région asymptotique $r \rightarrow 2m$ à V fixé correspond à $U \rightarrow 0$, et la métrique ne présente plus de singularité pour $r = 2m$. La formule (5) donne donc un prolongement de la métrique (3). La région $r = 0$ est par contre une vraie singularité, comme on peut le montrer avec l'explosion du scalaire de Kruzkal, qui est une contraction du tenseur de Riemann indépendante du choix de coordonnées

$$K = R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48m^2}{r^6}.$$

Cette singularité est de genre espace et se trouve dans le futur de tout observateur entrant dans le trou noir, qui l'atteint en un temps propre fini. ⁽²⁾

Les coordonnées U et V étant des coordonnées isotropes, il est pratique pour représenter l'espace-temps de repasser dans des coordonnées de temps et d'espace en posant

$$T = \frac{U + V}{2}, \quad X = \frac{V - U}{2}.$$

Cela permet d'obtenir le diagramme de Kruzkal-Szekeres donné dans la figure 1. La région $r > 2m$ du départ est le quart droit du diagramme (ce qui correspond à la région 1 de la figure 2).

⁽²⁾Le temps propre est défini comme la longueur d'une courbe pour la métrique g_S .

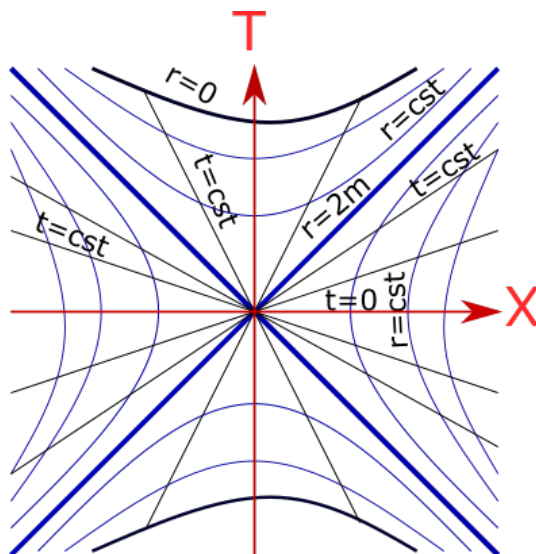


FIGURE 1 – Extension de Kruskal-Szekeres. Chaque point du dessin est une 2-sphère de rayon r dans l'espace-temps de Schwarzschild.

La solution de Schwarzschild est souvent représentée par son diagramme de Penrose (voir figure 2), qui est obtenu par une compactification de l'espace-temps préservant les directions isotropes :

$$U' = \arctan(U), \quad V' = \arctan(V).$$

La région $V' = \frac{2}{\pi}$ est appelée **infini isotrope**, et notée \mathcal{I}^+ (physiquement, c'est le lieu des observateurs lointains). Le passé de \mathcal{I}^+ est appelé **domaine de communication extérieur**, il correspond à la région 1 de la figure 2. La région $r = 2m$ est appelée **horizon des événements**, c'est la frontière du trou noir, celui-ci correspondant à la région 2 de la figure 2. La région 4 correspond à l'extension de la solution à travers $V = 0$, et la région 3 est une deuxième région asymptotique. Les régions 3 et 4 font partie du développement analytique de la solution de Schwarzschild, mais n'ont pas vraiment d'existence physique car elles ne sont plus présentes dès que l'on considère un trou noir qui se forme par effondrement gravitationnel, comme lorsqu'une étoile s'effondre sur elle-même.

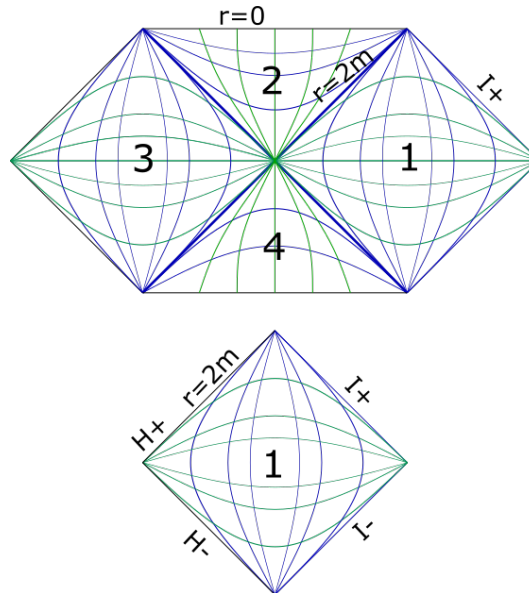


FIGURE 2 – Diagramme de Penrose de l'espace-temps de Schwarzschild et domaine de communication extérieure. L'axe des ordonnées correspond à $T' = \frac{V'+U'}{2}$ et l'axe des abscisses à $X' = \frac{V'-U'}{2}$. Les traits verts correspondent aux courbes t constant, et les traits bleus aux courbes r constant.

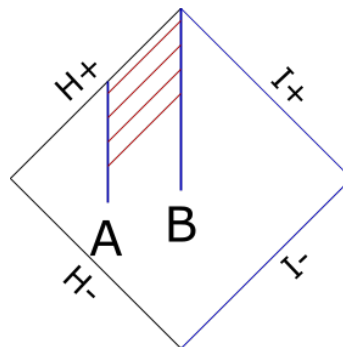


FIGURE 3 – Phénomène de redshift, ou décalage vers le rouge : dans ce dessin, l'observateur A entre dans le trou noir avec un temps propre fini, alors que l'observateur B reste à l'extérieur du trou noir : il atteint le sommet du carré, appelé infini temporel, en un temps propre infini (il ne faut pas oublier que le dessin représente une compactification de l'espace-temps). Les signaux envoyés par A sont donc reçus par B à des intervalles de temps de plus en plus longs, et B ne verra jamais A entrer dans le trou noir.